Το 5ο Θέμα

Τράπεζα Θεμάτων Φυσικής

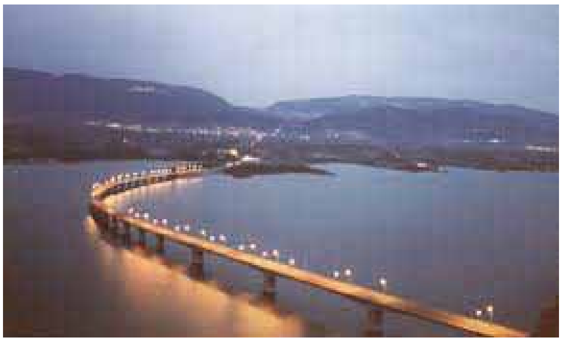
ISBN

Στη Χριστίνα, στο Γιάννη και στη Νίκη
για την υπομονή και τη στήριξή τους

Στον Μπάρμπα Γιάννη και την κυρά Νίκη
που μου έδωσαν τις αρχές και τα εφόδια
για μια όμορφη ζωή

Περιεχόμενα

Η γέφυρα των Σερβίων



Ο Δήμαρχος Σερβίων-Βελβεντού αποφασίζει να εκμεταλλευτεί την πανέμορφη υψηλή γέφυρα Σερβίων φτιάχνοντάς τη, χώρο για όλους τους λάτρεις των extreme sports, πίστα για bangee jumping. Η υψηλή γέφυρα Σερβίων έχει ύψος τώρα το φθινόπωρο 51,8m από την επιφάνεια του νερού. Ενας αγανακτισμένος, από τα νέα μέτρα της κυβέρνησης και της Δημοτικής αρχής, Σερβιώτης θέλει να δοκιμάσει την τύχη του και τις αντοχές του κάνοντας bangee jumping. Ο θαρραλέος Σερβιώτης που έχει ύψος 1,80m μέχρι τον σβέρκο του ονόματι Λαός έχει μάζα 0,1tn (για να πλησιάζει τα κιλά του προέδρου του Δημοτικού Συμβουλίου) δένεται από ελαστικό σκοινί που παίζει το ρόλο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K=1000N/m και φυσικού μήκους L=40m. Από λάθος (μπορεί και επίτηδες) όμως περνάει τη θηλιά του σκοινιού όχι στην μέση του αλλά στον σβέρκο του.

Ο Λαός πηδάει χωρίς αρχική ταχύτητα όρθιος και χωρίς να περιστρέφεται προς την επιφάνεια της λίμνης από τη γέφυρα. Να βρεθούν:

Α. Πόσο θα είναι το πλάτος ταλάντωσης του Λαού κατά την κάθοδο;

Β. Υπάρχει η πιθανότητα ο Λαός να πιάσει κάποιο ψάρι κατά την πτώση του; (όποιος δεν βρέξει τον κώλο του ψάρια δεν τρώει)

Γ. Αν η μέγιστη δύναμη που μπορεί να δεχθεί ο λαιμός του Λαού χωρίς να σπάσει είναι F_{max}=11.000N ο Λαός θα αντέξει τελικά;

Δ. Τι ελάχιστη ενέργεια θα έπρεπε να δώσει η Madame M (που ανέλαβε τελικά διοικητής της επιχείρησης) στον Λαό, στην αρχική του θέση ώστε να τελειώνουμε με τον Λαό, αν υποθέσουμε ότι ο Λαός μετά την εμφάνιση της Madame M φοβήθηκε και μαζεύτηκε κουβάρι κατά την πτώση του.

Το μήκος της θηλιάς να θεωρηθεί αμελητέο μπροστά στο μήκος του σκοινιού και το σχοινί δένεται από την γέφυρα στο ίδιο ύψος με το ύψος του σβέρκου του Λαού.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η κίνηση του Λαού μέχρι το σχοινί να αποκτήσει το φυσικό του μήκος είναι ελεύθερη πτώση. Ετσι με τη βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε:

$$MgL = \tfrac{1}{2} M\upsilon^2 \quad \text{άρα } \upsilon = \sqrt{800}\ \text{m/s}.$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης για το σύστημα θα βρεθεί από την ισορροπία των δυνάμεων: $Mg = Kx_1$ άρα $x_1 = 1$m.

Με τη βοήθεια της ΑΔΕΤ για την γ.α.τ που θα ακολουθήσει κατά την κάθοδο θα έχουμε:

$$\tfrac{1}{2} Kx_1^2 + \tfrac{1}{2} M\upsilon^2 = \tfrac{1}{2} KA^2 \quad \text{θα βρούμε } A = 9\text{m}.$$

Β. Ο Λαός θα κατέβει ύψος ίσο με το άθροισμα του μήκους του σχοινιού την επιμήκυνση του σχοινιού από την θέση φυσικού μήκους του μαζί με το ύψος μέχρι το σημείο πρόσδεσης του σχοινιού και το πλάτος ταλάντωσης έτσι συνολικά θα είναι

$H=L+x_1+A+H_1=51{,}8m$. Έτσι τα δάχτυλα των ποδιών του μόλις και δεν θα ακουμπήσουν στην επιφάνεια της λίμνης. Έτσι ο Λαός δεν υπάρχει πιθανότητα να τσιμπήσει κάποιο ψάρι.

Γ. Η μέγιστη δύναμη που θα δεχθεί ο Λαός από το σχοινί θα δίνεται από την σχέση:

$$F_{max}=Kx_{max}=K(x_1+A)=10.000N.$$

Ετσι ο Λαός, σε πρώτη φάση, θα τη γλιτώσει.

Δ. Για να «τελειώνουμε» με το Λαό θα πρέπει η μέγιστη δύναμη που θα αναπτυχθεί από το νήμα να γίνει:

$$F_{max}=11000N \text{ άρα } K(x_1+A')=11.000 \text{ άρα } A'=10m.$$

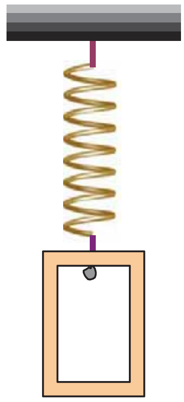
Έτσι με τη βοήθεια της ΑΔΕΤ για την στιγμή του τεντώματος του νήματος θα έπρεπε να έχουμε

$$\tfrac{1}{2} Kx_1^2 + K_{Λαου} = \tfrac{1}{2} KA'^2 \quad K_{Λαου}=49.500J$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ και της madame M για την πτώση του Λαού θα έχουμε

$$MgL + E_{minmadame} = K_{Λαου} \text{ άρα } E_{minmadame}=9.500J.$$

Θέμα εξετάσεων Κύπρου 1994.



Το σχήμα δείχνει ένα κουτί μάζας Μ και εσωτερικού ύψους h, κρεμασμένο στο ένα άκρο ελατηρίου κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς Κ. Αρχικά το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία. Ένα κομμάτι πλαστελίνης μάζας m είναι προσκολλημένο στο εσωτερικό του κουτιού και στο πάνω μέρος του κουτιού. Ξαφνικά, η πλαστελίνη αποκολλάται και πέφτει ελεύθερα προς τα κάτω.

Η πλαστελίνη κτυπά στο κάτω μέρος του κουτιού και προσκολλάται σε αυτό, ακριβώς τη στιγμή που το κουτί βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της ταλάντωσής του.

Α. Να δείξετε ότι το εσωτερικό ύψος του κουτιού είναι: $h=2mg/K+\pi^2 Mg/2K$

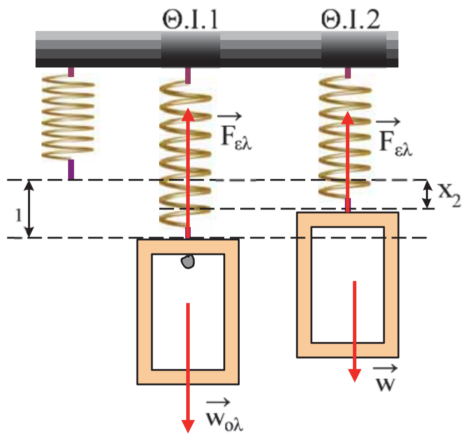
Β. Να δείξετε ότι το νέο πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος μετά την πλαστική κρούση, δίνεται από τη σχέση: $A_o{'}=(mg/K)(4+\pi^2 M/(M+m))^{1/2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την αρχική θέση ισορροπίας και για το σύστημα πλαστελίνη-κουτί ισχύει:

$$\Sigma F=0 \text{ άρα } F_{\varepsilon\lambda}=W_{o\lambda} \text{ άρα } K.x_1=(M+m).g \ (1),$$

όπου x_1 η απόσταση της αρχικής θέσης ισορροπίας από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Για τη θέση ισορροπίας του κουτιού ισχύει:



ΣF=0 άρα $F_{ελ}=W_{κουτιού}$ άρα $K.x_2=M.g$ (2)

όπου x_2 η απόσταση της θέσης ισορροπίας του κουτιού από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Το εσωτερικό ύψος του κουτιού μπορεί να βρεθεί αν προσθέσω στην ανύψωση του κουτιού την κατακόρυφη απόσταση που διανύει η πλαστελίνη πέφτοντας ελεύθερα.

Όταν όμως αποκολλάται η πλαστελίνη το κουτί είναι ακίνητο και εξαιτίας της αποκόλλησης της πλαστελίνης έχουμε αλλαγή θέσης ισορροπίας. Η αρχική θέση για το κουτί είναι και θέση ελάχιστης απομάκρυνσης (u=0) για την ταλάντωση του κουτιού ενώ η τελική θέση είναι η θέση μέγιστης απομάκρυνσης για την ταλάντωση του κουτιού από την εκφώνηση.

Έτσι αυτές οι δύο θέσεις απέχουν μεταξύ τους $2A_{κουτιού}$.

Όμως το $A_{κουτιού}=x_1-x_2=mg/K$.

Η πτώση της πλαστελίνης διαρκεί όσο και η ταλάντωση του κουτιού από την Θ.Ε.Α μέχρι Θ.Μ.Α. δηλαδή $T_{κουτιού}/2$.

Άρα για την ελεύθερη πτώση $y_{πλαστελίνης}=½\ g{\cdot}t^2$ άρα:

$y_{πλαστελίνης}=½\ g{\cdot}(T_{κουτιού}/2)^2$ άρα $y_{πλαστελίνης}=½\ g\ {\cdot}(π^2M/K)$

Άρα $h=2A_{κουτιού}+y_{πλαστελίνης} = 2mg/K + \pi^2 Mg/2K$

B. Η ταχύτητα της πλαστελίνης την στιγμή της κρούσης με το κουτί είναι:

$$V=g\cdot t=g\cdot T_{κουτιού}/2=g\cdot \pi (M/K)^{1/2}$$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση θα βρούμε την ταχύτητα κουτιού πλαστελίνης μετά την κρούση:

$$m.V=(M+m)V_{συσ.}\ (3)$$

Μετά την κρούση έχουμε πάλι αλλαγή της θέσης ισορροπίας για την ταλάντωση αυτή τη φορά του κουτιού-πλαστελίνης. Η νέα θέση ισορροπίας είναι η αρχική θέση ισορροπίας κουτιού πλαστελίνης. Η θέση της κρούσης από την τελική θέση ισορροπίας κουτιού πλαστελίνης απέχει κατακόρυφη απόσταση $2A_{κουτιού}$.

Έτσι αν εφαρμόσουμε την ΑΔΕΤ για την ταλάντωση μετά την κρούση θα έχουμε:

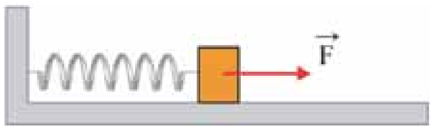
$$½\ K\ (2A_{κουτιού})^2 + ½\ (M+m)\cdot V^2_{συς} = ½\ K\ (A_o΄)^2\ (4)$$

Αν αντικαταστήσουμε την $V_{συσ}$ από την (3) στην (4) και κάνουμε πράξεις με υπομονή θα φτάσουμε:

$$A_o΄=(mg/K)(4+\pi^2 M/(M+m))^{1/2}$$

Μεταβλητή δύναμη και ταλάντωση.

Στο ελεύθερο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου σταθερά K=400N/m στερεώνεται σώμα μάζας m=1kg,το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο. Το σώμα είναι επίσης δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου νήματος, το οποίο βρίσκεται στην προέκταση του άξονα του ελατηρίου. Το σώμα ισορροπεί στην Θ.Φ.Μ.Ε. Στο άλλο άκρο του νήματος ασκείται δύναμη F=50+300x όπου x η απόσταση του σώματος από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Όταν η ταχύτητα του σώματος γίνεται μέγιστη το νήμα σπάει και το σώμα εκτελεί α.α.τ.



Να υπολογιστούν:

Α. Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος μετά το κόψιμο του νήματος.

Β. Να βρεθεί ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μετά το κόψιμο του νήματος.
Δίνεται η σχέση ημ2x=2συνx.ημx

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

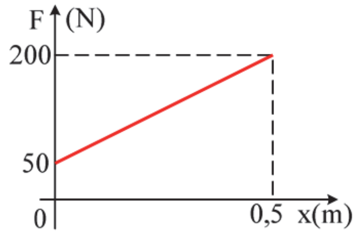
Α. Το σώμα εκτελεί μια επιταχυνόμενη κίνηση με όλο και μειούμενη επιτάχυνση η οποία μπορεί να βγει από τον $2^{ο}$ Νεύτωνα:

$\Sigma F = ma$ άρα $F - F_{ελ} = m.a$ $50+300x-400x=1.a \rightarrow 50-100x=a$ (1)

Όταν λοιπόν το α>0 η κίνηση είναι επιταχυνόμενη. Όταν το α<0 κίνηση είναι επιβραδυνόμενη. Παρατηρώ λοιπόν ότι τη στη θέση όπου α=0 σταματάει η επιταχυνόμενη και αρχίζει η επιβραδυνόμενη κίνηση. Άρα σε εκείνη τη θέση το σώμα έχει την μέγιστη ταχύτητα.

Από σχέση (1) παίρνουμε 50-100x=0 άρα x=0,5m

Το νήμα λοιπόν κόβεται στην θέση x=0,5m και το έργο της δύναμης μέχρι αυτή τη θέση μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια του παρακάτω διαγράμματος



E=W=(B+b)u/2 =62,5J

Το έργο της δύναμης είναι στην ουσία η ενέργεια της ταλάντωσης αφού αν δεν υπήρχε η δύναμη δεν θα υπήρχε και η ταλάντωση (Α.Δ.Ε.)

$W_F=E_{ταλ}$ άρα $62{,}5=1/2 \cdot 400 \cdot A^2$ Άρα

$$A = \frac{\sqrt{5}}{4}\,\text{m}.$$

Β. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργεια δίνεται από την σχέση: $ΔΚ/Δt=ΣF.u=-K.x.u=-KAημ(ωt+φ_o).ω.Aσυν(ωt+φ_o)=$

$$-½\, KωA^2ημ2(ωt+φ_o)$$

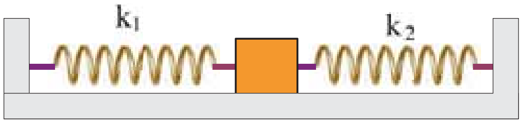
έτσι για να έχουμε μέγιστο ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας θα πρέπει:

$$\eta\mu 2(\omega t+\varphi_o)=-1$$

άρα $(\Delta K/\Delta t)max= K\omega A^2/2 =1250J/s$

Ένα σώμα- Δύο ταλαντώσεις.

Σώμα μάζας $m=4kg$ ισορροπεί ανάμεσα σε δύο οριζόντια ελατήρια με σταθερές $K_1=100N/m$ και $K_2=300N/m$. Τα δύο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος στη θέση ισορροπίας του σώματος m και το ελατήριο με σταθερά K_1 είναι δεμένο με το σώμα ενώ το ελατήριο με σταθερά K_2 είναι σε επαφή με το σώμα χωρίς όμως να είναι συνδεδεμένο με αυτό. Δίνουμε στο σώμα αρχική ταχύτητα $υ_o=1m/s$ έτσι ώστε το ελατήριο K_2 να αρχίσει να συσπειρώνεται. Να βρεθούν:



A. Η περίοδος της περιοδικής κίνησης που θα εκτελέσει το σώμα.
B. Να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για χρονικό διάστημα μιας περιόδου της περιοδικής κίνησης.

Θετική φορά να θεωρηθεί η φορά της αρχικής ταχύτητα $υ_o$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Η κίνηση του σώματος μάζας m μπορεί να χωρισθεί σε δύο ξεχωριστές αλλά διαδοχικές κινήσεις. Η πρώτη είναι "μισή" γ.α.τ. με σταθερά επαναφοράς $D_1=K_1+K_2$ ενώ η δεύτερη είναι επίσης "μισή" γ.α.τ. με σταθερά $D_2=K_1$ αφού το ελατήριο με σταθερά K_2 μετά την επαναφορά του σώματος στην αρχική θέση δεν παίζει πλέον κανένα ρόλο. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε την παραπάνω κίνηση σαν μια περιοδική κίνηση η οποία αποτελείται από δύο διαδοχικές "μισές" γ.α.τ. με περίοδο

$$T=T_1/2+T_2/2=\pi/10+\pi/5=3\pi/10\ s.$$

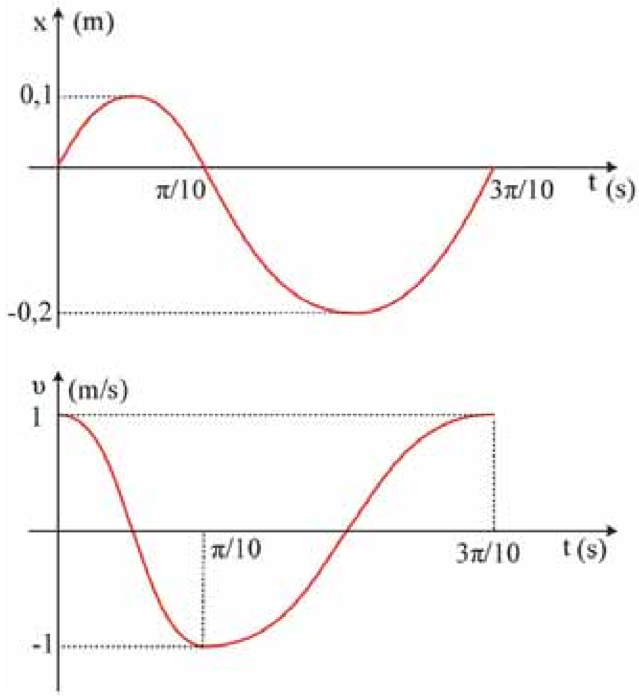
Η μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα είναι κοινή και για τις δύο "μισές" γ.α.τ. και άρα $\upsilon_0=\omega_1\cdot A_1$ άρα

$$A_1=0{,}1m$$

ενώ $\upsilon_0=\omega_2\cdot A_2$ άρα

$$A_2=0{,}2m.$$

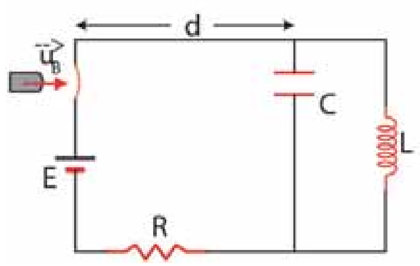
B. Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις με βάση τα παραπάνω, είναι αυτές του σχήματος:



Δύο ηλεκτρικές ταλαντώσεις στο ίδιο κύκλωμα.

Ενα βλήμα από καουτσούκ κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα κόβει το λεπτό αλουμινόχαρτο του παρακάτω σχήματος την στιγμή t=0. Στη συνέχεια το βλήμα σφηνώνεται ακαριαία και καλύπτει όλο το χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή τη χρονική στιγμή 2T όπου T η περίοδος ταλάντωσης του αρχικού κυκλώματος L-C.

Δίνονται E=100V, C=1mF, L=1mH και R=20Ω, ενώ η διηλεκτρική σταθερά του βλήματος είναι ε=4. Αν η απόσταση αλουμινόχαρτου-πυκνωτή είναι d=20cm να βρεθούν :



A. Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος αν αυτή θεωρηθεί σταθερή και οριζόντια
B. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του φορτίου του κάτω οπλισμού πυκνωτή για χρόνο t=8π ms μετά το κόψιμο του αλουμινόχαρτου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Την στιγμή t=0 που το βλήμα κόβει το αλουμινόχαρτο η πηγή βγαίνει εκτός κυκλώματος και αρχίζει η ηλεκτρική ταλάντωση L-C έχοντας όλη της ενέργειά της στο πηνίο αφού το ρεύμα σε αυτό έχει ήδη αποκατασταθεί. Ο πυκνωτής εκείνη τη στιγμή είναι αφόρτιστος αφού η τάση του είναι ίση με του πηνίου δηλαδή 0.
Το ρεύμα λοιπόν που διαρρέει το πηνίο την t=0 είναι I=E/R=5A.

Η $T=2\pi\sqrt{LC}$ άρα $T=2\pi\cdot 10^{-3}$sec.

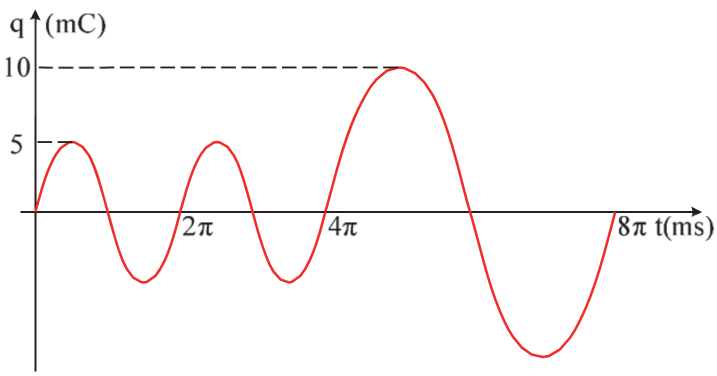
Το βλήμα εκτελεί ομαλή κίνηση. Έτσι:

$$d=V_{\beta}\cdot 2T \qquad \text{άρα } V_{\beta}=50/\pi \text{ m/sec}$$

Β. Την στιγμή του σφηνώματος η ενέργεια του κυκλώματος είναι και πάλι στο πηνίο. Τότε όμως η προσθήκη του βλήματος στον πυκνωτή του αλλάζει την χωρητικότητα και άρα την περίοδο ταλάντωσης του κυκλώματος. Η νέα χωρητικότητα του πυκνωτή θα είναι $C'=\varepsilon\cdot C=4\cdot 10^{-3}$F.

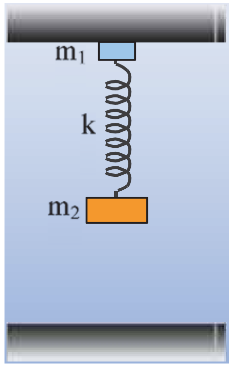
Η νέα λοιπόν περίοδος θα είναι $T'=4\pi\cdot 10^{-3}$sec.

Από την ΑΔΕΤ στο αρχικό κύκλωμα $UB_{max}=UE_{max}$ έχουμε Q=5mC ενώ για το τελικό κύκλωμα Q′=10mC. Έτσι η γραφική παράσταση του κάτω οπλισμού που φορτίζεται πρώτα θετικά έχουμε



Διπλή Ταλάντωση.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο σημειακά σώματα με μάζες m_1=0,25kg και m_2=1kg που είναι δεμένα με ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς K=100N/m και φυσικού μήκους L_0=0,5m. Το πάτωμα και το ταβάνι έχουν την ιδιότητα όταν έρθουν σε επαφή με ένα από τα δύο σώματα να κολλάνε απευθείας με αυτό ενώ την ίδια στιγμή το άλλο σώμα να απελευθερώνεται. Την στιγμή t=0 σώμα μάζας m_2 αφήνεται ελεύθερο με το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος και το σώμα μάζας m_1 να είναι κολλημένο στο ταβάνι. Μόλις το σώμα μάζας m_2 φτάσει στο πάτωμα κολλάει αυτόματα σε αυτό και την ίδια στιγμή ξεκολλάει το σώμα μάζας m_1 από το ταβάνι. Σε όλο το παραπάνω φαινόμενο και στη συνέχεια αυτού δεν θέλουμε να χάνεται καθόλου ενέργεια. Να βρεθούν:



Α. Η κατακόρυφη απόσταση του πατώματος από το ταβάνι.

Β. Ο χρόνος που θα χρειασθεί μέχρι να ξαναβρεθούν τα δύο σώματα στην αρχική τους θέση

Γ. Η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων.

Δίνεται το $g=10m/sec^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να μην υπάρχουν απώλειες ενέργειας σε όλο το παραπάνω φαινόμενο το κάθε σώμα θα φτάνει στο πάτωμα ή στο ταβάνι έχοντας μηδενική ταχύτητα.

Το σώμα m_2 δεν έχει αρχικά ταχύτητα άρα θα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσής του. Η θέση ισορροπίας του απέχει από την αρχική θέση απόσταση που θα βρεθεί από την σχέση $m_2g=Kx_2$ άρα $x_2=0{,}1m$. Η απομάκρυνση αυτή ταυτίζεται και με το πλάτος ταλάντωσης του σώματος m_2. Ετσι το σώμα μάζας m_2 θα διανύσει απόσταση $S=2A_2$ μέχρι να σταματήσει άρα να ακουμπήσει στο πάτωμα. Άρα η κατακόρυφη απόσταση του δαπέδου από το ταβάνι θα είναι $D=L_0+2A_2=0{,}7m$.

Β. Ο χρόνος που θα χρειασθεί το πρώτο σώμα για να πάει στο πάτωμα θα είναι $T_2/2$ αμέσως μετά ξεκινάει η ταλάντωση του δεύτερου σώματος που για να επανέλθει στην αρχική του θέση θα χρειασθεί χρόνο T_1 ενώ ο χρόνος που θα κάνει το πρώτο σώμα να επανέλθει στην αρχική του θέση θα είναι πάλι $T_2/2$. Ετσι ο συνολικός μας χρόνος θα είναι

$$\Delta t=T_1+T_2=0{,}3\pi \text{ sec}$$

Γ. Την στιγμή που αποκολλάται το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του και απέχει από την θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου $2A_2=0{,}2m$.

Για την νέα θέση ισορροπίας αυτού του σώματος θα ισχύει

$$M_1g=Kx_1 \text{ άρα } x_1=0{,}025m \text{ άρα το } A_1=0{,}225m.$$

Ετσι η ελάχιστη απόσταση των δύο σωμάτων θα είναι όταν το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται στην κατώτερη θέση της ταλάντωσή του και άρα τότε το ελατήριο θα είναι συσπειρωμένο κατά:

$x_{ολ}=A_1+x_1=0,25m$ άρα η $x_{min}=L_0-x_{ολ}=0,25m$.

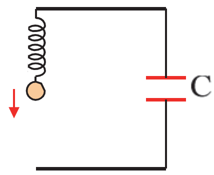
Η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων είναι η απόσταση του πατώματος από το νταβάνι

$$H_{max}=0,7m.$$

Μηχανική- Ηλεκτρική Ταλάντωση.

Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα ελατήριο με σταθερά K=10N/m που ταυτόχρονα όταν έχει το φυσικό του μήκος συμπεριφέρεται και σαν ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L=10mH. Το ελατήριο-πηνίο είναι ακλόνητα στερεωμένο σε αγώγιμο μηδενικής αντίστασης ταβάνι.

Ο πυκνωτής χωρητικότητας C=2μF του σχήματος συνδέεται μέσω άκαμπτων χωρίς αντίσταση αγωγών και είναι αρχικά φορτισμένος με φορτίο Q. Σημειακό αγώγιμο χωρίς αντίσταση σώμα μάζας M= 0,1 kg συνδέεται με το ελατήριο-πηνίο ενώ αυτό έχει το φυσικό του μήκος L_o=0,3m. Εκτοξεύουμε το σημειακό σώμα μάζας M με κατακόρυφη αρχική ταχύτητα U_o έτσι ώστε ο ελατήριο μόλις και να φτάσει στην κάτω αγώγιμη και ακλόνητη ράβδο διπλασιάζοντας το φυσικό του μήκος. Εκείνη τη στιγμή το σημειακό σώμα κολλάει στην κάτω ράβδο και έτσι αρχίζουν ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Να βρεθούν:



A. Το μέτρο της αρχικής ταχύτητα U_o.
B. Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Από τη συνθήκη ισορροπίας $M.g=K.x_1$ άρα x_1=0,1m

Η ταλάντωση ξεκινάει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατήριου και το σημειακό σώμα σταματάει μόλις το ελατήριο διπλασιάσει το φυσικό του μήκος. Αρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι

$$A=L_o-x_1=0,3-0,1=0,2m.$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ θα έχουμε $\frac{1}{2}.M.U_o^2 + \frac{1}{2}.K.x_1^2 = \frac{1}{2}.KA^2$ άρα μετά τις πράξεις $U_0=\sqrt{3}m/sec$.

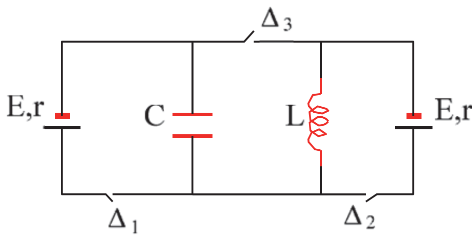
B. Οπως γνωρίζουμε από την ύλη της Β Λυκείου ο συντελεστής αυτεπαγωγής δίνεται από τη σχέση $L=\mu.\mu_0.N^2A/l$.Ετσι αφού το μήκος του ελατηρίου έχει διπλασιασθεί σε σχέση με το φυσικό του μήκος ο συντελεστής αυτεπαγωγής θα έχει μειωθεί στο μισό.

Αρα $L'=L/2=5mH$.

Ετσι η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων θα δίνεται από τη σχέση $T=2\pi.\sqrt{L'.C}=2\pi.10^{-4}sec$.

Ηλεκτρική ταλάντωση με μέγιστους ρυθμούς.

Δίνεται το παρακάτω κύκλωμα Οι πηγές είναι όμοιες και έχουν ΗΕΔ E=120V και εσωτερική αντίσταση r=12Ω, ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα C=1μF, το πηνίο είναι ιδανικό και έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L=144μH. Οι διακόπτες $Δ_1$ και $Δ_2$ κλείνουν ταυτόχρονα ενώ ο διακόπτης $Δ_3$ μένει ανοιχτός. Την χρονική στιγμή που οι ρυθμοί αποταμίευσης της ενέργειας στο πηνίο και στον πυκνωτή γίνουν ταυτόχρονα μέγιστοι ανοίγουμε τους διακόπτες $Δ_1$ και $Δ_2$ και κλείνουμε τον διακόπτη $Δ_3$.



Να βρεθούν:

Α. Η εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο θεωρώντας t=0 την χρονική στιγμή που κλείνουμε τον διακόπτη $Δ_3$.

Β. Ο μέγιστος ρυθμός αποθήκευσης της ενέργειας στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή μετά το κλείσιμο του $Δ_3$.

Την χρονική στιγμή $t_1=15π.10^{-6}$sec μετά το κλείσιμο του διακόπτη $Δ_3$ απομακρύνουμε ακαριαία την απόσταση των οπλισμών του πυκνωτή τετραπλασιάζοντας την αρχική τους απόσταση.

Να βρεθούν:

Γ. Το έργο που δαπανήθηκε για να απομακρυνθούν οι οπλισμοί του πυκνωτή.

Δ. Η γραφική παράσταση του φορτίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο μετά το κλείσιμο του διακόπτη $Δ_3$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το κύκλωμα με τον πυκνωτή θα έχουμε $E.I.t=I^2.r.t + P_c.t$ θα πάρουμε την δευτεροβάθμια ως προς Ι

$$I^2.r - E.I + P_c = 0$$

που θα πρέπει να έχει θετική διακρίνουσα άρα $P_c \le E^2/4r$ και για μέγιστο ρυθμό αποθήκευσης στον πυκνωτή το $I=E/2r=5A$.

Η πολική τάση της πηγής είναι ίση με την τάση στα άκρα του πυκνωτή $V_{πολ}=V_c$ άρα $E-I.r=V_c$ άρα $V_c=E/2=60V$ άρα το φορτίο του πυκνωτή εκείνη την στιγμή θα είναι:

$$q=C.V_c=6.10^{-5}C.$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το κύκλωμα με το πηνίο θα έχουμε $E.I.t=I^2.r.t + P_L.t$ θα πάρουμε την δευτεροβάθμια ως προς Ι

$$I^2.r - E.I + P_L = 0$$

που πρέπει να έχει θετική διακρίνουσα άρα $P_L \le E^2/4r$ και για μέγιστο ρυθμό αποθήκευσης ενέργειας στο πηνίο το $I=i=E/2r=5A$

Την στιγμή λοιπόν που κλείνουμε τον διακόπτη $Δ_3$ και ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με τον κάτω οπλισμό θετικά φορτισμένο αλλά και το πηνίο διαρρέεται από ρεύ-μα με φορά προς τα επάνω.

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για το κύκλωμα L-C θα έχουμε

$$½\ q^2/C + ½\ L.i^2 = ½\ Q^2/C \quad \text{θα βρούμε } Q=6\sqrt{2}.10^{-5}C.$$

Ετσι η εξίσωση του φορτίου θα δίνεται από την σχέση:

$$q=Qσυν(ωt+φ) \text{ για } t=0$$

$συνφ=\sqrt{2}/2$ και επειδή το $i<0$ $φ=π/4$. Το $ω=1/\sqrt{L.C}=10^6/12 r/s$.

$$Αρα\ q=6\sqrt{2}.10^{-5}συν(10^6t/12+π/4)\ (S.I.)\ \ (1)$$

Β. Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του πυκνωτή μετά το κλείσιμο του διακόπτη $Δ_3$ θα δίνεται από την σχέση $P_c=V_c.i=q.i/C=Qσυν(ωt+π/4).(-Iημ(ωt+π/4)=-Q.I.ημ(2ωt+π/2)/2C$ και θα έχει μέγιστη τιμή $P_{cmax}=Q.I/2C=3600J/s$.

Γ. Με αντικατάσταση στην (1) του χρόνου t_1 θα έχουμε q=0C δηλαδή ο πυκνωτής την παραπάνω χρονική στιγμή είναι αφόρτιστος. Αρα δεν θα δαπανηθεί έργο για να απομακρυνθούν οι οπλισμοί σε τετραπλάσια απόσταση της αρχικής απόστασης. Ετσι λοιπόν η ενέργεια της ταλάντωσης θα διατηρηθεί σταθερή.

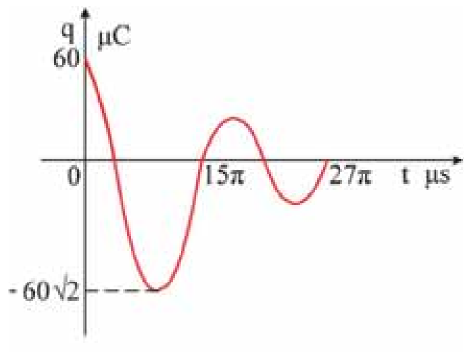
Δ. Η χωρητικότητα του πυκνωτή δίνεται από την σχέση C=εοS/l άρα C΄=C/4 Από την σχέση της ολικής ενέργεια ταλάντωση $E=Q^2/2C$ το νέο

$$Q΄=Q/2=3\sqrt{2}.10^{-5}C$$

ενώ από την σχέση της περιόδου $T=2π\sqrt{L.C}$ η νέα περίοδος θα γίνει:

$$T΄=T/2=12π.10^{-6}s$$

έτσι η γραφική παράσταση θα είναι



Υστερόγραφο για τους λάτρεις των χρονοκυκλωμάτων R-C & R-L

Από την σχέση για το ρεύμα στην φόρτιση του πυκνωτή $I=E/r.\ e^{-t/r.C}$ θα βρίσκαμε ότι ο χρόνος που χρειάζεται το χρονοκύκλωμα για να φτάσει το ρεύμα στο $I=E/2r$ θα ήταν $t=r.C.ln2=12.10^{-6}.ln2$ sec

Ενώ για την αποκατάσταση του κυκλώματος R-L και από την σχέση του ρεύματος $I=E/r.(1-e^{-rt/L})$ για να φτάσει το ρεύμα στην τιμή $I=E/2r$ θα χρειαζόταν και πάλι χρόνος : $t=L/r.ln2=12.10^{-6}ln2$ sec.

Αρα ταυτόχρονα και τα δύο κυκλώματα πετυχαίνουν μέγιστο ρυθμό αποθήκευσης ενέργειας και στον πυκνωτή αλλά και στο πηνίο.

Ένα κύμα στον.. ιστό της αράχνης

Σώμα μάζας M=4Kg είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο με σταθερά $K=100\pi^2 N/m$ και ισορροπεί σε ύψος H=3,2m το έδαφος. Στο σώμα είναι δεμένος ένας οριζόντιος αβαρής ιστός αράχνης με μεγάλο μήκος. Δύο αράχνες βρίσκονται σε αποστάσεις 0,3m και 0,5m αντίστοιχα από το σώμα κολλημένες στον ιστό. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στον ιστό είναι V=1m/sec. Ένα δεύτερο σώμα μάζας M=4Kg κινείται κατακόρυφα και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο έχοντας ταχύτητα μέτρου 0,5π m/sec.Την στιγμή που το δεύτερο σώμα φτάνει στο έδαφος :

Α. Να σχεδιαστεί η μορφή του ιστού της αράχνης.

Β. Πόσο απέχουν τα ζωύφια.

Γ. Πόσα σημεία του ιστού έχουν ταχύτητα μέτρου $u_{max}/2$ όπου u_{max} η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης τους.

Δ. Ποιος ο λόγος των μέτρων των δυνάμεων επαναφοράς που δέχονται τα ζωύφια.

Δίνεται το $g=10m/sec^2$.

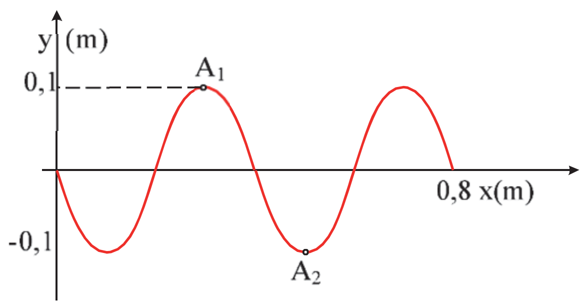
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος και ταυτόχρονα και η περίοδος ταλάντωσης όλων των σημείων του ιστού θα δίνεται από τη σχέση $T=2\pi\sqrt{M/K}=0,4sec$. Τα σώματα έχουν την ίδια μάζα και συγκρούονται ελαστικά άρα θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Ετσι η ταχύτητα του σώματος που είναι δεμένο στο ελατήριο θα είναι $u=0{,}5\pi$ m/sec ενώ το σώμα που ανέβαινε θα αποκτήσει στιγμιαία ταχύτητα 0. Το σώμα αυτό θα κάνει ελεύθερη πτώση και θα φτάσει στο έδαφος μετά από χρόνο που θα βρεθεί από την σχέση της θέσης στην ελεύθερη πτώση $H=1/2\, g.t^2$

$3{,}2=1/2\,.10.t^2$ Αρα $t=0{,}8$sec.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $V=\lambda.f$ και με αντικατάσταση το $\lambda=0{,}4$m. Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος θα βρεθεί από τη σχέση $U_{max}=\omega.A$ και άρα $A=0{,}1$m.

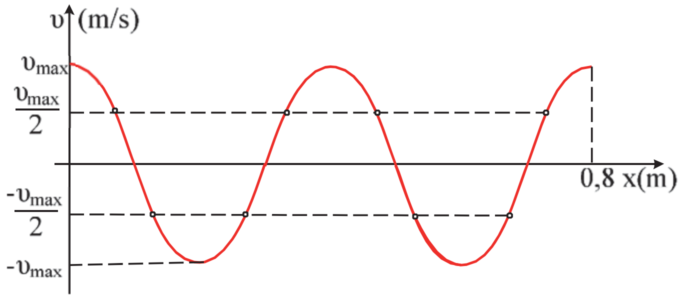
A. Ο χρόνος πτώσης του σώματος αντιστοιχεί με 2Τ άρα το στιγμιότυπου του κύματος θα είναι



B. Η σχέση της ταχύτητας ταλάντωσης των διάφορων σημείων του ιστού για την στιγμή t=0,8sec θα δίνεται από τη σχέση

$$U=\omega A.\sigma\upsilon\nu 2\pi(0{,}8/0{,}4 - x/0{,}4)=0{,}5\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(2-\chi/0{,}4) \text{ (S.I.)}$$

Από την γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης με το χ θα βρω τα σημεία που θέλω



Τα σημεία λοιπόν όπως φαίνεται στο σχήμα είναι 8.

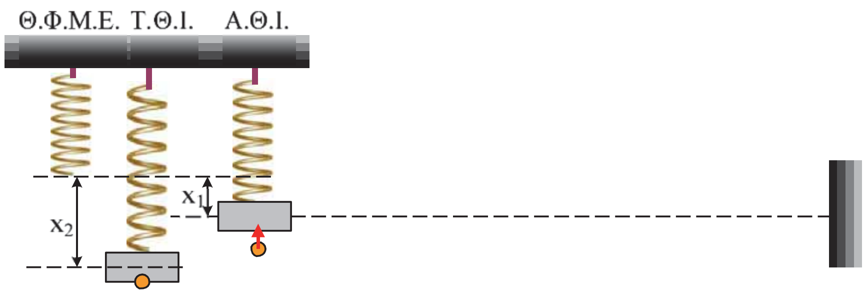
Γ. Οι αράχνες όπως φαίνεται και στο στιγμιότυπο βρίσκονται η πρώτη στην θέση +A και η δεύτερη στη θέση –A την στιγμή που το δεύτερο σώμα φτάνει στο έδαφος. Έτσι με ένα πυθαγόρειο θεώρημα θα βρω $D=\sqrt{(2A)^2+(\Delta x)^2}=0,2\sqrt{2}$ m.

Δ. Ο λόγος των δυνάμεων θα είναι $|F_1/F_2| = |-D.A/-D(-A)| = 1$

Αλλαγή στη θέση ισορροπίας ΑΑΤ και ένα κύμα.

Σώμα μάζας m_1=2kg είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=10\pi^2$N/m και ισορροπεί. Στο σώμα είναι δεμένη οριζόντια αβαρής ελαστική χορδή μεγάλου μήκους πάνω στην οποία μπορεί να διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με ταχύτητα V=1m/s. Βλήμα μάζας m_2=0,5kg κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου u=π/2 m/s και σφηνώνεται ακαριαία στο σώμα m_1 την στιγμή t=0. Να βρεθεί η εξίσωση απομάκρυνσης του συστήματος (θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω) των δύο σωμάτων και να σχεδιαστεί η μορφή της ελαστικής χορδής την χρονική στιγμή t=2,625s. Να θεωρηθεί ότι η απομάκρυνση ψ θα έχει σαν αρχή Ο την θέση ισορροπίας του συστήματος (m_1+m_2) με το ελατήριο. π^2=10 και $g=10m/s^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Για την ισορροπία του m_1 θα έχουμε $m_1.g=Kx_1$ και x_1= 0,2m

Για την ισορροπία του (m_1+m_2) θα έχουμε $(m_1+m_2).g=Kx_2$ και x_2= 0,25m

Για την κρούση από την ΑΔΟ θα πάρουμε:

$$m_2.u=(m_1+m_2).V_{συσωμ} \text{ και } V_{συσωμ}=0,1\pi \text{ m/sec.}$$

Η αλλαγή της μάζας θα επιφέρει αλλαγή της ΘΙ και η ΑΔΕΤ θα μας δώσει το νέο πλάτος ταλάντωσης.

$$K + U = E_{ολ}$$

$$½\,(m_1+m_2)V_{συσωμ}^2 + ½\,K(χ_2-χ_1)^2 = ½\,KA^2$$

και $A=0{,}05\sqrt{2}m$

Η εξίσωση απομάκρυνσης για τα σύστημα των δύο σωμάτων θα δίνεται από την σχέση $x=Aημ(ωt+φ_0)$ για $t=0$ $χ=0{,}05m$ και $V>0$

Αρα $0{,}05=0{,}05\sqrt{2}ημφ_0$ και έτσι $φ_0=π/4$. Το $ω=\sqrt{K/Mολ}=2π$ r/sec.

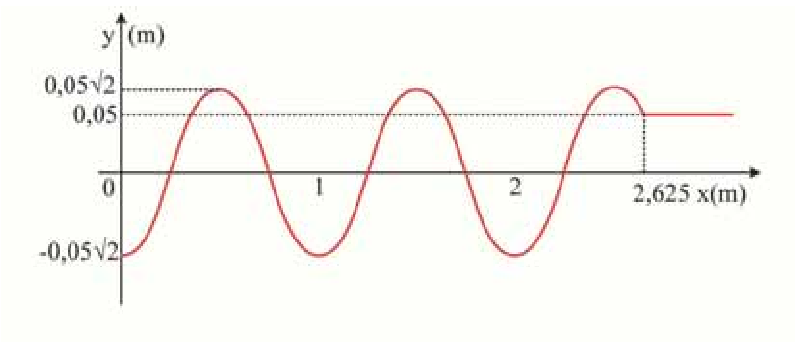
Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι

$$Ψ=0{,}05\sqrt{2}\ ημ(2πt+π/4)\ (S.I.)$$

Το κύμα θα έχει διαδοθεί πάνω στη χορδή κατά $χ=V\cdot t=2{,}625m$. Στον χρόνο αυτό η πηγή με βάση την εξίσωση απομάκρυνσης θα έχει φτάσει στη θέση $ψ= -0{,}05\sqrt{2}$ m δηλαδή στην θέση -Α. Το σημείο $χ=2{,}625m$ είναι το σημείο που ετοιμάζεται να ταλαντωθεί αλλά φυσικά βρίσκεται στην θέση $ψ=0{,}05m$ εκεί δηλαδή που βρισκόταν όλη η οριζόντια χορδή την στιγμή t=0.

Το μήκος κύματος του κύματος θα είναι $u=λ.f$ άρα $λ=1m$.

Ετσι η μορφή της χορδής θα είναι



Συμβολή κυμάτων από σύγχρονες πηγές.

Δύο σύγχρονες πηγές O_1 και O_2 απέχουν μεταξύ τους 1m και δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα u=5m/sec. Οι δύο πηγές των κυμάτων την χρονική στιγμή t=0 αρχίζουν να εκτελούν κατακόρυφες ταλαντώσεις με εξισώσεις $\psi_1=\psi_2=0,3ημ50πt$ (S.I.). Δύο σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2 και απέχουν 0,45m και 0,65m από την πηγή O_1 αντίστοιχα .Να βρεθούν :

Α. Οι εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο για τα σημεία Α και Β.

Β. Πόσο απέχουν τα σημεία μεταξύ τους τις χρονικές στιγμές
i) t_1= 0,08sec ii)t_2=0,1sec iii)t_3=0,2sec.

Γ. Πόσα σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος μετά την έναρξη της συμβολής και στα δύο σημεία;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Από τις εξισώσεις Α=0,3m και ω=50π r/s Άρα f=25Hz και από τον νόμο της κυματικής u=λ.f το λ=0,2m.

Για να αρχίσει η ταλάντωση ενός σημείου του μέσου θα πρέπει να έχει φτάσει το κύμα στο συγκεκριμένο σημείο.

Έτσι για να φτάσει το κύμα από την πηγή O_1 στο Α χρειάζεται χρόνο t_1=0,45/5=0,09s και για να φτάσει το κύμα από την πηγή O_2 στο Α χρειάζεται χρόνο t_2=0,55/5=0,11sec.

Οι αντίστοιχοι χρόνοι για το σημείο Β θα είναι t_3=0,35/5=0,07s και

t_4=0,65/5=0,13s. Τα σημεία μετά την συμβολή θα έχουν πλάτος $A'=2A\left|\sigma\upsilon\nu\pi(R_1-R_2)/\lambda\right|=0m$ και για το σημείο Α και για το Β.

Είναι δηλαδή σημεία απόσβεσης.

$$\Psi_A=\begin{cases}0 & t\leq 0{,}09\\ 0{,}3\eta\mu 2\pi(25t-0{,}45/0{,}2) & 0{,}09\leq t\leq 0{,}11 \quad (S.I)\\ 0 & t\geq 0{,}11\end{cases}$$

$$\Psi_B=\begin{cases}0 & t\leq 0{,}07\\ 0{,}3\eta\mu 2\pi(25t-0{,}35/0{,}2) & 0{,}07\leq t\leq 0{,}13 \quad (S.I)\\ 0 & t\geq 0{,}13\end{cases}$$

Ετσι οι εξισώσεις ταχύτητας για τα σημεία Α και Β θα είναι αντίστοιχα

$$U_A=\begin{cases}0 & t\leq 0{,}09\\ 15\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(25t-0{,}45/0{,}2) & 0{,}09\leq t\leq 0{,}11 \quad (S.I)\\ 0 & t\geq 0{,}11\end{cases}$$

$$U_B=\begin{cases}0 & t\leq 0{,}07\\ 15\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(25t-0{,}35/0{,}2) & 0{,}07\leq t\leq 0{,}13 \quad (S.I)\\ 0 & t\geq 0{,}13\end{cases}$$

B. Την χρονική στιγμή t_1=0,08s μόνο το σημείο Β έχει αρχίσει να ταλαντώνεται και βρίσκεται στην θέση

$$\psi_B=0{,}3\eta\mu 2\pi(25.0{,}08-0{,}35/0{,}2)=0{,}3m.$$

Το σημείο Α δεν έχει αρχίσει ακόμη την ταλάντωση του άρα ψ_A=0. Ετσι η μεταξύ τους απόσταση εκείνη την στιγμή θα βρεθεί με Π.Θ. και $D_1=\sqrt{(0{,}3)^2+(0{,}2)^2}=\sqrt{0{,}13}$ m.

Την χρονική στιγμή t_2=0,1s και τα δύο σημεία ταλαντώνονται. Ετσι

Ψ_A=0,3ημ2π(25.0,1-0,45/0,2)=0,3m και

Ψ_B=0,3ημ2π(25.0,1-0,35/0,2)=-0,3m.

Ετσι η μεταξύ τους απόσταση εκείνη την στιγμή θα βρεθεί και πάλι με Π.Θ. και $D_2=\sqrt{(0,6)^2+(0,2)^2}=\sqrt{0,4}$m.

Την χρονική στιγμή t_3=0,2s τα σημεία είναι ποια ακίνητα αφού είναι σημεία απόσβεσης και έχει ήδη αρχίσει η συμβολή και στα δύο σημεία. Ετσι η μεταξύ τους απόσταση είναι 0,2m.

Γ. Τα σημεία με μέγιστο πλάτος είναι τα σημεία ενίσχυσης και για αυτά θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη ενίσχυσης.$R_1-R_2=κ.λ$.Ομως $R_1+R_2=1$ Αν προσθέσω τις δύο παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη θα πάρω $2R_1=κ.λ+1$.Για την απόσταση όμως R_1 πρέπει να ισχύει $0,45 \leq R_1 \leq 0,65$ θα καταλήξω στην σχέση $-0,5 \leq κ \leq 1,5$.

Αρα για κ=0 και κ=1 ισχύει η συνθήκη ενίσχυσης.

Αρα υπάρχουν δύο σημεία ανάμεσα στα Α και Β με που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

Το κύμα διαδίδεται και η σημαδούρα;

Δύο σημαδούρες Α και Β απέχουν μεταξύ τους απόσταση ΑΒ=13,5m και η ευθεία γραμμή που διέρχεται από αυτές είναι κάθετη στην ακτογραμμή. Πλοίο που κινείται παράλληλα στην ακτογραμμή, μακριά από τις σημαδούρες δημιουργεί κύμα, με φορά διάδοσης από το Α προς το Β, το οποίο θεωρούμε εγκάρσιο αρμονικό. Το κύμα διαδίδεται προς την ακτή. Εξ αιτίας του κύματος η κάθε σημαδούρα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της 30 φορές το λεπτό. Ο χρόνος που απαιτείται, για να φτάσει ένα «όρος» του κύματος από τη σημαδούρα Α στη Β, είναι 9s.Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης της κάθε σημαδούρας είναι π/5 m/s. Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων τη σημαδούρα Α και ως αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή που η σημαδούρα Α βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και κινείται προς τα θετικά.

Α. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος.

Β. Πόσο απέχει η σημαδούρα Α από την ακτή, αν αυτή βρίσκεται για $21^{η}$ φορά στην ανώτερη θέση της ταλάντωσής της, όταν το κύμα φτάνει στην ακτή.

Γ. Να γραφεί η εξίσωση ταλάντωσης της σημαδούρας Β, καθώς το κύμα διαδίδεται από τη σημαδούρα Α προς τη Β.

Δ. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης της σημαδούρας Β κάποια χρονική στιγμή που σημαδούρα Α βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της ταλάντωσής της.

Ε. Ένας νεαρός θέλοντας να παίξει με το κύμα ξεκινάει από τη ακτή με φορά προς τις δύο σημαδούρες και πάνω στην ευθεία που ενώνει τις σημαδούρες. Ο νεαρός κάθεται πάνω σε κάθισμα που στηρίζεται σε ιδανικό ελατήριο σταθερά $K=400\pi^2 N/m$ έχοντας αυτός μάζα $M_1=60Kg$ και το κάθισμα της βάρκας έχει μάζα $M_2=40Kg$. Τι ταχύτητα πρέπει να έχει η βάρκα του για να απολαύσει «μέγιστα» την διαδρομή;(Το στομάχι του νεαρού είναι σε άριστη κατάσταση). Η εξαναγκασμένη ταλάντωση που θα εκτελέσει ο νεαρός να θεωρηθεί χωρίς απόσβεση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η σημαδούρα διέρχεται από την θέση ισορροπίας 30 φορές άρα κάνει 15 ταλαντώσεις στο λεπτό. Αρα η συχνότητα ταλάντωσης της σημαδούρας είναι $f=N/t=15/60=0,25Hz$

Από $\chi=V.t$ άρα $13,5=V.9$ άρα $V=1,5$ m/sec. Από σχέση της κυματικής $V=\lambda.f$ θα πάρω $\lambda=6m$.

Β. Για να φτάσει η σημαδούρα στην θέση +Α για πρώτη φορά χρειάζεται χρόνος Τ/4 ενώ για κάθε επόμενη φορά χρειάζεται χρόνος ίσος με την περίοδο ταλάντωσης της σημαδούρας άρα συνολικά θα χρειασθούμε $T/4 +20T =1+80=81sec$. Αρα η ακτή θα απέχει $X=V.t=1,5.81=121,5m$.

Γ. Η εξίσωση απομάκρυνση για την σημαδούρα Β θα είναι : $\Psi_B=A\eta\mu 2\pi(t/T - X_B/\lambda)$ για $t\geq 9s$ από την σχέση $V_{max}=\omega.A$ άρα $\pi/5=2\pi/4 .A$ άρα $A=0,4m$ Ετσι $\Psi_B=0,4\eta\mu 2\pi(t/4 - 13,5/6)$ για $t\geq 9s$ στο (S.I).

Δ. Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων των δύο σημαδούρων ήταν $\Delta\varphi=2\pi|\Delta X|/\lambda$ έτσι $\Delta\varphi=2\pi.13,5/6=27\pi/6 =4\pi+\pi/2$.

Ετσι αφού η σημαδούρα Α θα βρίσκεται στην +Α η Β θα βρίσκεται στην θέση ισορροπίας και άρα $V_B=V_{max}=\pi/5$ m/sec .

Ε. Ο νεαρός που πάει κόντρα στο κύμα για να διασκεδάσει «τα μέγιστα» θα πρέπει να ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος που είναι δυνατό. Ετσι καθώς ταλαντώνεται στο κάθισμα της βάρκας του θα πρέπει το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Ετσι η συχνότητα του κύματος που αντιλαμβάνεται αλλά και η συχνότητα ταλάντωσης της καρέκλας της βάρκας θα πρέπει να είναι ίσες. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι

$f_o=1/2\pi\sqrt{M_{ολ}/K}=1$Hz.

Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο νεαρός θα είναι με βάσει το φαινόμενο Doppler

$F=(V+V_{βάρκας})F_S/V$ Άρα $1=(1{,}5+V_{βάρκας})0{,}25/1{,}5$ και έτσι η $V_{βάρκας}=4{,}5$m/sec.

Στάσιμο κύμα και αποστάσεις σημείων.

Κατά μήκος οριζόντιου ελαστικού μέσου και κατά την διεύθυνση του άξονα Οx δημιουργείται στάσιμο κύμα. Στη θέση $x=0$ εμφανίζεται κοιλία. Το σημείο Α είναι το αμέσως επόμενο σημείο μετά το Ο που έχει την ίδια μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης κατά μέτρο με το σημείο Ο.
Η στιγμιαία απόσταση των σημείων Ο και Α καθορίζεται από την σχέση $0{,}08m \leq D \leq 0{,}1m$. Η ελάχιστη χρονική διάρκεια που χρειάζονται τα σημεία Α και Β για να βρεθούν από την μέγιστη στην ελάχιστη απόστασή τους είναι 1/40 s.
Να βρεθούν:

Α. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος αν την στιγμή $t=0$ σημείο $x=0$ $v>0$.

Β. Να βρεθεί σε ποια θέση βρίσκεται ο $1000^{ος}$ δεσμός.

Γ. Να βρεθεί η διαφορά φάσης για δύο σημεία που βρίσκονται στις θέσεις $x_B=10cm$ και $x_\Gamma=14cm$.

Δ. Να βρεθεί η εξίσωση της στιγμιαίας απόστασης μεταξύ των σημείων $x_\Delta=12cm$ και $x_E=16cm$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να έχει το σημείο Α την ίδια μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης με το σημείο Ο που είναι κοιλία του στάσιμου κύματος σημαίνει ότι και το Α είναι κοιλία του στάσιμου κύματος με $V_{max}=\omega\cdot 2A$.

Η επόμενη κοιλία μετά το $\chi=0$ βρίσκεται στην θέση $\chi=\lambda/2$. Τα σημεία αυτά ταλαντώνονται με εξισώσεις:

$$\psi=2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\chi/\lambda\cdot\eta\mu 2\pi t/T$$

και αν αντικαταστήσουμε $\chi=0$ και $\chi=\lambda/2$ θα πάρουμε:

$$\psi_O=2A\eta\mu 2\pi t/T \text{ και } \psi_A=-2A\eta\mu 2\pi t/T.$$

Η μεταξύ τους λοιπόν απόσταση θα δίνεται κάθε στιγμή από την σχέση:

$D=\sqrt{(\Delta\chi)^2+(|\psi_1|+|\psi_2|)^2}$ (1) με τη βοήθεια του Π.Θ.

Από την σχέση (1) παρατηρώ ότι η ελάχιστη τιμή του D θα συμβαίνει όταν τα $\psi_1=\psi_2=0$ (όταν δηλαδή τα σημεία Ο, Α βρίσκονται στην Θ.Ι.Τ) και η μέγιστη όταν τα σημεία Α και Β βρίσκονται στις ακραίες θέσεις ταλάντωσής τους +2Α και -2Α.

$D_{min}=\lambda/2$ άρα $\lambda=0{,}16m$ και $D_{max}=\sqrt{(\lambda/2)^2+(4A)^2}$

άρα $A=0{,}015m$

Για να φτάσουν τα σημεία Ο και Α από την ελάχιστη στην μέγιστη απομάκρυνση στον μικρότερο χρόνο χρειάζονται χρόνο T/4.

Έτσι η περίοδος είναι T=0,1sec.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι:

$$\psi=0{,}03\sigma\upsilon\nu 12{,}5x.\eta\mu 20\pi t \text{ (S.I.)}$$

Β. Η σχέση που δίνει τους δεσμούς για ένα στάσιμο κύμα της παραπάνω μορφής είναι :

$$x_{ΔΕΣΜΩΝ}=(2\kappa+1)\lambda/4.$$

Προσοχή όμως ο πρώτος δεσμός είναι για την τιμή κ=0. Αρα ο 1000^ος^ δεσμός θα βρεθεί για κ=999 Έτσι $X_{1000ου}=79{,}96m$.

Γ. Η εξίσωση ταλάντωση για το Β θα είναι:

$$\psi_B=0,03συν12,5π.0,1ημ20πt= -0,015\sqrt{2}ημ20πt=$$
$$0,015\sqrt{2}ημ(20πt+π)\ (S.I.)$$

Η εξίσωση ταλάντωση για το Γ θα είναι:

$$\psi_Γ=0,03συν12,5π\cdot0,14ημ20πt=0,015\sqrt{2}ημ20πt\ (S.I.)$$

Η διαφορά λοιπόν της φάσης για τα σημεία Β και Γ είναι $Δφ=π$

Δ. Η εξίσωση ταλάντωση για το Δ θα είναι

$$\psi_Δ=0,03συν12,5π.0,12ημ20πt= 0\ m.$$

Το σημείο λοιπόν Δ είναι δεσμός του στάσιμου κύματος.

Η εξίσωση ταλάντωσης για το Ε θα είναι:

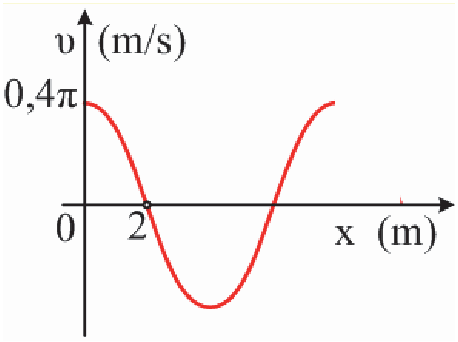
$$\psi_E=0,03συν12,5π.0,16ημ20πt= 0,03ημ20πt\ \ (S.I.)\ .$$

Η εξίσωση λοιπόν της στιγμιαίας απόστασης των σημείων Δ και Ε θα βρεθεί με την βοήθεια του Π.Θ. και θα είναι

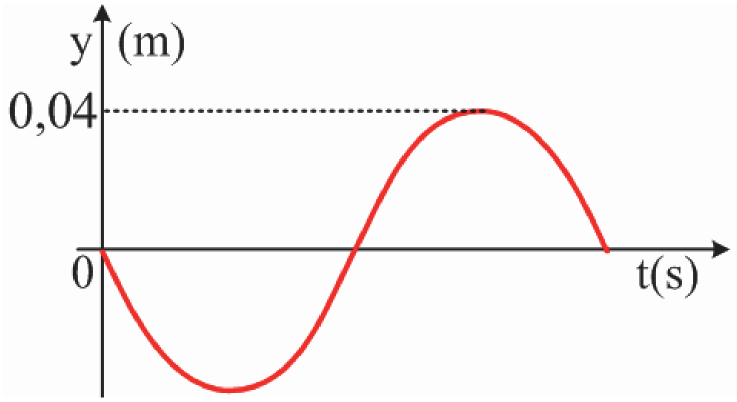
$$D'=\sqrt{\{(Δχ)^2 + \psi_E^2\}} = \sqrt{\{(0,04)^2 + 0,03^2.ημ^2 20πt\}}\ (S.I.)$$

Στάσιμο κύμα. Στοιχεία και γραφικές παραστάσεις

Ένα τεντωμένο σχοινί εκτείνεται στην διεύθυνση του άξονα Οχ. Με κατάλληλη διαδικασία, κατά μήκος του σχοινιού δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στην θέση x=0. Τη χρονική στιγμή t=0 το σημείο στο x=0 έχει μέγιστη θετική ταχύτητα. Η γραφική παράσταση της ταχύτητας των διαφόρων σημείων της χορδής σε συνάρτηση της θέσης δίνεται από της παρακάτω γραφική παράσταση την στιγμή t=0.



Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σημείου που βρίσκεται στην θέση x=4m σε συνάρτηση με το χρόνο είναι



Να βρεθούν:

Α. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός σημείου που βρίσκεται στη θέση χ=7m

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου που βρίσκεται στη θέση χ=3m

Δ. Να χαραχθεί ένα στιγμιότυπο μέχρι χ=16m του στάσιμου κύματος την χρονική στιγμή t=kT+T/12 όπου k=0,±1±2±3 … Ποιά η κατεύθυνση της ταχύτητας των σημείων που βρίσκονται στις θέσεις x_1=3m , x_2=5m , $χ_3$=7m και $χ_4$=9m τις παραπάνω στιγμές.

Ε. Να δοθεί η γραφική παράσταση του πλάτους των διαφόρων σημείων της χορδής από το x=0 μέχρι χ=16m.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Από την γραφική παράσταση της ταχύτητας βλέπουμε την μέγιστη ταχύτητα του σημείου x=0 που είναι κοιλία V_{max}=0,4π m/sec. Αρα V_{max} =ω.2Α (1). Το σημείο χ=2m δεν έχει ταχύτητα ταλάντωσης άρα είναι δεσμός του στάσιμου κύματος και μάλιστα ο πρώτος δεσμός. Αρα λ/4=2 λ=8m.

Για το σημείο x=4m η εξίσωση του στάσιμου θα δώσει $ψ_4$=2Aσυν2π.4/8.ημ2πt/T =- 2Aημ2πt/T Από την γραφική παράσταση λοιπόν παρατηρούμε ότι 2 Α=0.04 και Α=0,02m και από την σχέση (1) ω= 10π r/sec.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι:

ψ=0,04συνπχ/4 .ημ10πt (S.I.)

Β. Η απομάκρυνση του σημείου χ=7m δίνεται από την σχέση:

$$\psi_7=0,04\sigma\upsilon\nu 7\pi/4.\eta\mu 20\pi t = 0,02\sqrt{2}\ \eta\mu 10\pi t \ \ (S.I.)$$

Η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι:

$$u_7=0,02\sqrt{2}.10\pi\sigma\upsilon\nu 10\pi t=0,2\pi\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu 10\pi t \ \ (S.I.)$$

Γ. Η απομάκρυνση του σημείου χ=3m δίνεται από την σχέση

$$\psi_3=0,04\sigma\upsilon\nu 3\pi/4.\eta\mu 10\pi t = -0,02\sqrt{2}\ \eta\mu 10\pi t \ (S.I.)$$

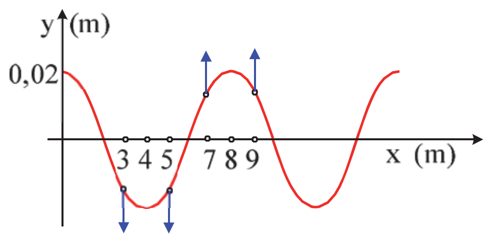
Η εξίσωση της επιτάχυνσης θα είναι

$$\alpha_3=-\omega^2.\psi_3=2\pi^2\sqrt{2}\eta\mu 10\pi t \ \ (S.I.)$$

Δ. Ολα τα σημεία του στάσιμου κύματος σε χρόνο kT επιστρέφουν στην θέση ισορροπίας τους δηλαδή πάνω στην ευθεία Οχ. Σε χρόνο T/12 το σημείο χ=0 θα έχει φτάσει στη θέση

$$\psi_O=2A\eta\mu\pi/6=A=0,02m.$$

Το στιγμιότυπο θα είναι

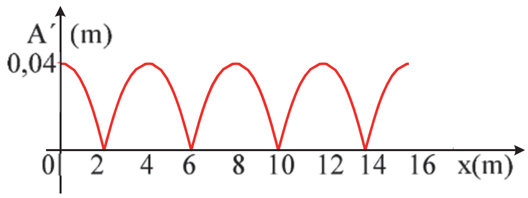


Ολα τα σημεία του στάσιμου κύματος που ταλαντώνονται την χρονική στιγμή T/12<T/4 απομακρύνονται από την θέση ισορροπίας για αυτό και έχουν τις κατευθύνσεις που φαίνονται στο σχήμα.

Ε. Η εξίσωση του πλάτους ταλάντωσης για τα στάσιμα δίνεται από την εξίσωση

$A' = |2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\chi/\lambda| = |0{,}04\sigma\upsilon\nu\pi\chi/4|$

Η γραφική παράσταση του πλάτος των διαφόρων



Ήθελα να είχα και μια και δύο και τρεις και τέσσερις…

Σύγχρονες πηγές…

Τέσσερις σύγχρονες πηγές κυμάτων δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα u=1m/sec. Την στιγμή t=0 οι πηγές O_1 , O_2 ,O_3 και O_4 αρχίζουν ταυτόχρονα να ταλαντώνονται κατακόρυφα με εξισώσεις $\psi_1=\psi_2=\psi_3=\psi_4=0,1ημ2πt$ (S.I.). Οι σημειακές πηγές σχηματίζουν τετράγωνο πλευράς α=√2m πάνω στην επιφάνεια του υγρού. Την χρονική στιγμή t_1=2sec σταματάει να ταλαντώνεται η πηγή O_4. Τη χρονική στιγμή t_2=3sec σταματάει να ταλαντώνεται και η πηγή O_3. Το ίδιο συμβαίνει και την χρονική στιγμή t_3=4sec και t_4=5sec με τις άλλες δύο πηγές O_2 και O_1. Να δοθεί η εξίσωση απομάκρυνσης ταλάντωσης για το σημείο που αντιστοιχεί στο κέντρο του τετραγώνου που σχηματίζουν οι τέσσερις πηγές καθώς και να γίνει η γραφική παράσταση αυτής σε συνάρτηση με τον χρόνο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Με τη βοήθεια του ΠΘ το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου θα είναι d=2m άρα η απόσταση του κέντρου από την κάθε πηγή θα είναι $R_1=R_2=R_3=R_4$=1m. Η περίοδος ταλάντωσης του σημείου αυτού θα είναι Τ=2π/ω=1sec και το μήκος κύματος θα βρεθεί από την σχέση U=λ.f άρα λ=1m.

Η εξίσωση του κάθε κύματος που παράγει η κάθε πηγή θα είναι

Ψ=0,1ημ2π(t-R) (S.I.) έτσι για το κέντρο του τετραγώνου

$$\psi_1=\psi_2=\psi_3=\psi_4=0{,}1\eta\mu2\pi(t-1) \text{ (S.I.) για } t\geq1sec$$

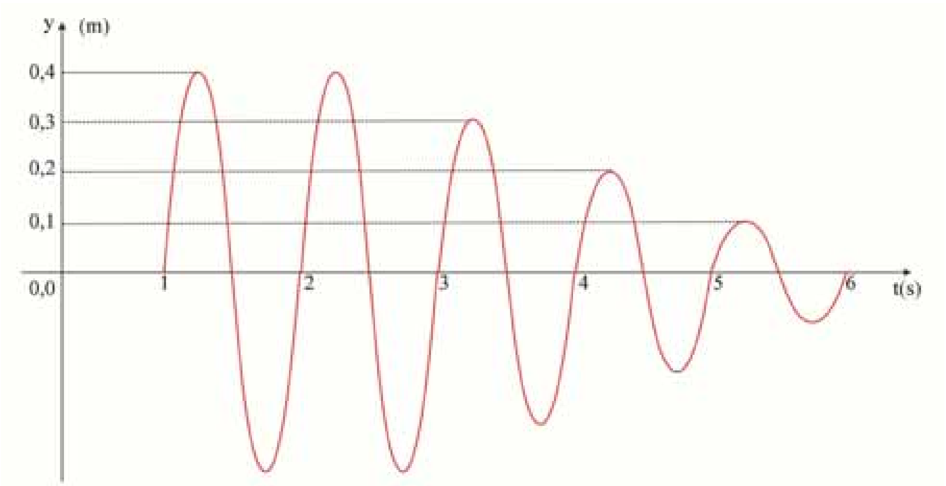
άρα το $\psi_{ολ}=4\psi_1=0{,}4\eta\mu2\pi(t-1)$ (S.I) για $t\geq1sec$ και για όσο χρόνο φυσικά ταλαντώνονται όλες οι πηγές.

Από την σχέση του διαστήματος για την ομαλή κίνηση $R=U.t$ για να φτάσει μία διαταραχή από την κάθε πηγή στο κέντρο του τετραγώνου θα χρειαζόταν χρόνος $\Delta t=1sec$.

Ετσι γενική μορφή απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο θα δινόταν σύμφωνα με τη σχέση

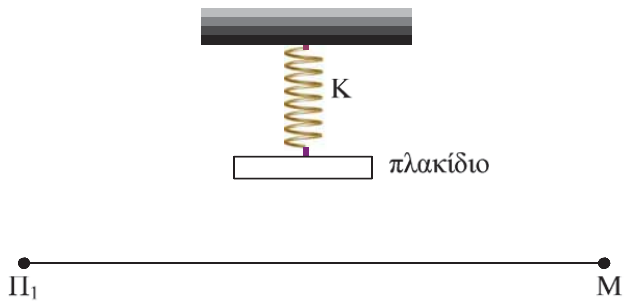
$$y_{ολ}=\begin{cases} 0 & 0\leq t\leq1 \\ 0{,}4\eta\mu2\pi(t-1) & 1\leq t\leq3 \\ 0{,}3\eta\mu2\pi(t-1) & 3\leq t\leq4 \\ 0{,}2\eta\mu2\pi(t-1) & 4\leq t\leq5 \\ 0{,}1\eta\mu2\pi(t-1) & 5\leq t\leq6 \\ 0 & 6\leq t \end{cases}$$

Αρα η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή



Ηλεκτρομαγνητικό κύμα

Πηγή $Π_1$ παράγει Η/Μ κύμα που όταν διαδίδεται σε γυάλινο πλακίδιο έχει εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου: $E=0{,}02ημ2π(1{,}5.10^8t-x)$ (S.I). Το πλακίδιο δένεται από κατακόρυφο ελατήριο σταθερά K=100N/m όπως στο σχήμα.



Η πηγή συνεχίζει να εκπέμπει Η/Μ κύματα τα οποία φτάνουν σε ένα σημείο Μ είτε απευθείας είτε μέσω ανάκλασης πάνω στο πλακίδιο. Το κατακόρυφο ελατήριο βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Μ$ που έχει μήκος 12m. Το πλακίδιο αρχίζει να εκτελεί α.α.τ. με το κατώτερο σημείο της ταλάντωσης του να απέχει ελάχιστη απόσταση από το ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Μ$ 8m. Όταν το πλακίδιο βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του στο σημείο Μ παρατηρούμε ενισχυτική συμβολή χωρίς να ανιχνεύουμε άλλο σημείο ενίσχυσης στην διάρκεια της ταλάντωσης του πλακιδίου. Να βρεθούν:

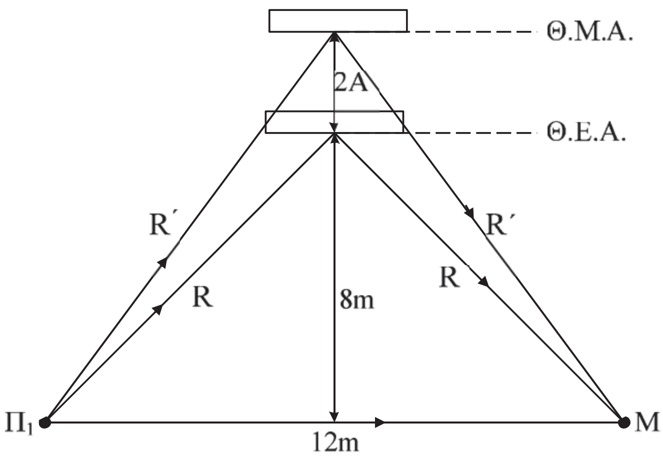
A. Ο δείκτης διάθλασης του πλακιδίου και το μήκος κύματος στο κενό.
B. Η ενέργεια της ταλάντωσης του πλακιδίου.

Να θεωρηθεί √85=9,2 . Η ανάκλαση δεν επηρεάζει την κίνηση του πλακιδίου ούτε η κίνηση του πλακιδίου επηρεάζει την διάδοση του ΗΜ κύματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Από την εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου $f=1{,}5.10^8$ Hz ενώ το μήκος κύματος στο γυαλί είναι λ=1m. Το μήκος κύματος στο κενό θα είναι $3.10^8=\lambda.1{,}5.10^8$ άρα λ_o=2m.

$n=\lambda_o/\lambda$ άρα n=2



B. Στο σημείο Μ επιτυγχάνεται ενίσχυση άρα με βάση την συνθήκη ενίσχυσης για την περίπτωση που ο ανακλαστήρας βρίσκεται στην ΘΕΑ θα πάρουμε

$$2R-R_1=k\lambda_o \quad (1)$$

Ενώ όταν ο ανακλαστήρας βρίσκεται στην ΘΜΑ θα έχουμε

$$2R' - R_1 = (k+1)\lambda_o \quad (2)$$

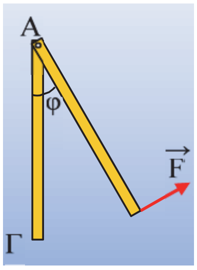
αφού η διαδρομή $2R' > 2R$ και δεν υπάρχει άλλο σημείο ενίσχυσης μέχρι ο ανακλαστήρας να φτάσει στην ΘΜΑ. Αν αφαιρέσουμε την σχέση (2) από την (1) θα πάρουμε $2R' - 2R = \lambda o$ Από Π.Θ. θα πάρουμε $R = 10m$ άρα $R' = 11m$.

Από το Π.Θ. Το $R' = \sqrt{6^2 + (8+2A)^2}$ Αρα $A = 0,6m$

Ετσι η ενέργεια ταλάντωσης του πλακιδίου θα είναι $E = \frac{1}{2} KA^2 = 18$ J

Μια μεταβλητή δύναμη σε ράβδο.

Ράβδος ΑΓ μάζας M=1Kg και μήκους L=0,6m μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το ένα της άκρο Α γύρω από οριζόντιο άξονα χωρίς τριβές. Την στιγμή t=0 και ενώ η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση αποκτά αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0=10r/s και ταυτόχρονα εφαρμόζεται πάνω της μεταβλητή δύναμη F συνεχώς κάθετη στη ράβδο στο άκρο της Γ και με εξίσωση F=5ημφ (S.I.) όπου φ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την αρχική κατακόρυφη θέση της ράβδου όπως στο παρακάτω σχήμα.



Η δύναμη F καταργείται μόλις μηδενιστεί το μέτρο της για πρώτη φορά μετά την εφαρμογής της.
Να βρεθούν:

Α. Ο χρόνος που ασκήθηκε η δύναμη F
Β. Η γραφική παράσταση του μέτρου της ροπής της δύναμης F σε συνάρτηση της γωνίας και μέχρι το μηδενισμό αυτής. Τι εκφράζει το περικλειόμενο εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των γωνιών; Μπορεί να υπολογιστεί το εμβαδόν; Αν ναι πόσο είναι αυτό το εμβαδόν;
Γ. Η μέγιστη ισχύς της δύναμης
Δ. Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου

Για την ράβδο $I_{cm}=1/12ML^2$.

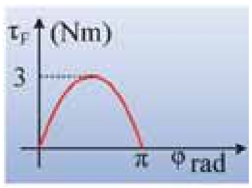
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Μια μεταβλητή δύναμη σε ράβδο. Με την βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση θα έχουμε

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $FL-MgL\eta\mu\varphi/2=I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και μετά από πράξεις $\alpha\gamma\omega\nu=0r/s^2$.

Παρατηρώ δηλαδή ότι η ράβδος θα εκτελέσει ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10r/s$. Η δύναμη θα μηδενιστεί για πρώτη φορά όταν ημφ=0 δηλαδή για γωνία φ=π . Αρα ο χρόνος που θα κάνει η ράβδος για να φτάσει στην ανώτερή της θέση εκεί όπου η δύναμη θα μηδενιστεί θα βρεθεί από τη σχέση $\theta=\omega_o t$ ή $t=\pi/10$ s.

Β. Η ροπή της δύναμης F θα δίνεται από την σχέση $\tau_F=FL=3\eta\mu\varphi$ (S.I.) Ετσι η γραφική της παράσταση θα είναι



Το περικλειόμενο εμβαδό εκφράζει το έργο της ροπής της δύναμης. Με την βοήθεια του ΘΜΚΕ από την αρχική θέση της ράβδου και μέχρι την ανώτερή της θέση θα έχουμε

$$W_F+W_W=\Delta K$$

και επειδή η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της ράβδου είναι 0 το W_F=MgL=6J. Αρα και το περικλειόμενο εμβαδό θα είναι 6J.

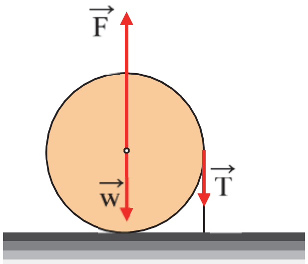
Γ. Η ισχύς της δύναμης δίνεται από τον τύπο P=τω (1) Επειδή η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι σταθερή η ισχύς της δύναμης θα γίνει μέγιστη όταν η ροπή της θα γίνει μέγιστη. Αυτό συμβαίνει όταν η γωνία διαγραφής είναι π/2 άρα $τ_{Fmax}$=3N.m Με βάση την σχέση (1) P_{max}=30J/s

Δ. Η ράβδος θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια στην χαμηλότερη θέση της τροχιάς εκεί δηλαδή όπου η δυναμική της ενέργεια είναι η ελάχιστη. Αυτό θα συμβεί όταν η ράβδος φτάσει στην αρχική της θέση. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από την ανώτερη στην κατώτερη θέση της ράβδου θα έχουμε

$\frac{1}{2} I\omega_o^2 + MgL = \frac{1}{2} I\omega_{max}^2$ και μετά από πράξεις θα βρούμε $\omega_{max} = 10\sqrt{2}$ r/s.

Ένα γιο-γιο και μεταβλητή δύναμη

Γύρω από ομογενή κύλινδρο μάζας M=10Kg έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα μεγάλου μήκους. Ο κύλινδρος ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το ένα άκρο του νήματος δεμένο στο έδαφος και το νήμα κατακόρυφο. Ασκούμε στο κέντρο του νήματος κατακόρυφη μεταβλητή δύναμη της μορφής F=150-10h (S.I.) όπου h η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.



Το αποτέλεσμα της παραπάνω δύναμης είναι ο κύλινδρος να αρχίζει να ανέρχεται κατακόρυφα και το νήμα να ξετυλίγεται.

Να βρεθούν:

Α. Η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

Β. Η μέγιστη ανύψωση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

Για τον κύλινδρο $I_{cm}=0,5M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Από τους νόμους την κίνησης για την μεταφορική και στροφική κίνηση θα έχουμε

$$F\text{-}M.g\text{-}T=M.a \quad (1)$$

$$T.R=0{,}5.M.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$\text{άρα } T=0{,}5.M.a \quad (2)$$

Από (1) και (2)

$$a=(50-10h)/15 \quad (3) \quad (S.I.) \quad \text{και}$$

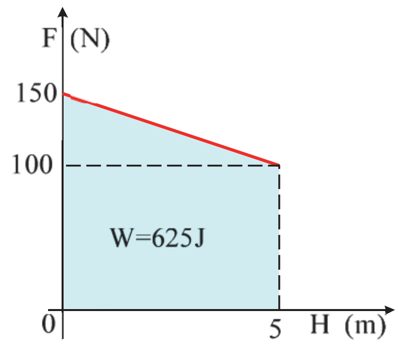
$$T=(50-10h)/3 \quad (4) \quad (S.I.)$$

Από την σχέση (3) βλέπουμε ότι το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορικά κίνηση με επιτάχυνση που συνεχώς μειώνεται. Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα όταν $a=0m/sec^2$ Αυτό θα συμβεί όταν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει ανέλθει κατά h=5 m.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κίνηση μέχρι Δh=5m

$$W_F=K_{\mu\varepsilon\tau}+K_{\sigma\tau\rho}+UW \quad (5)$$

το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί με την βοήθεια της παρακάτω γραφικής παράστασης



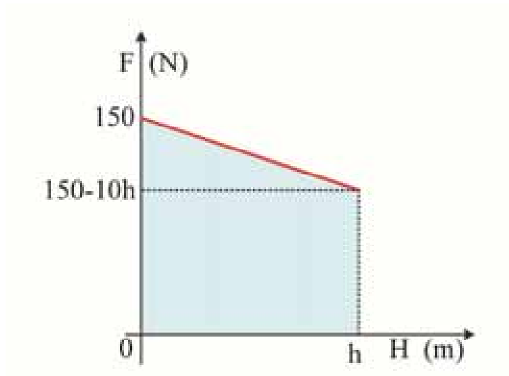
Από την (5) μετά από πράξεις θα βρούμε $U_{max}=10/\sqrt{6}$ m/sec.

Β. Από την σχέση (4) παρατηρούμε ότι το νήμα χαλαρώνει (T=0N) όταν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει ανέλθει κατά h=5m . Ετσι μετά τα 5m ο κύλινδρος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση μιας και δεν θα υπάρχει καμία δύναμη που να προκαλεί ροπή.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε

$$W_F=K_{στρ} + UW \quad (6)$$

το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί με την βοήθεια της παρακάτω γραφικής παράστασης



$$W_F=150h-5h^2 \quad (S.I.)$$

και με αντικατάσταση στην σχέση (6)

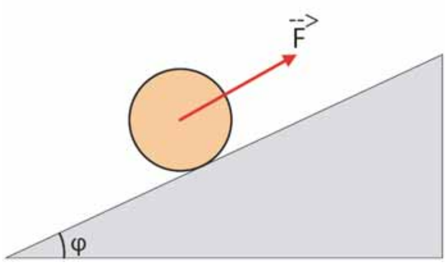
$$150h-5h^2=125/3 +100h$$

$$\text{άρα } h^2-10h+25/3=0 \text{ άρα}$$

$$h\approx 9{,}08m$$

Κεκλιμένο επίπεδο και μεταβλητή δύναμη

Κύλινδρος μάζας $m=2Kg$ αρχίζει να ανέρχεται κυλιόμενος χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^o$ με την βοήθεια μεταβλητής δύναμης της μορφής $F=20-10x$ (S.I.) όπου x η μετατόπιση του κέντρου μάζας πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Η δύναμη ασκείται στο κέντρο του κυλίνδρου στην θέση $x=0$ την στιγμή $t=0$ και είναι παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο. Η δύναμη παύει να ασκείται στον κύλινδρο μετά τον μηδενισμό της.



Να βρεθούν:

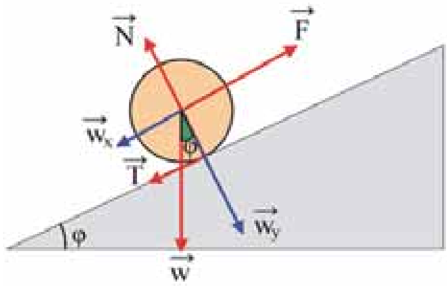
Α. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου την στιγμή που η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο είναι κάθετη προς το κεκλιμένο επίπεδο. Είναι κάποια ειδική ταχύτητα η ταχύτητα του κέντρου μάζας εκείνη την στιγμή;

Β. Να αποδειχθεί ότι τη στιγμή που μηδενίζεται η δύναμη ο κύλινδρος φτάνει στο μέγιστο ύψος από την αρχική του θέση και να βρεθεί το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου σε σχέση με την αρχική θέση του.

Γ. Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αυτός επιστρέψει στην θέση όπου βρισκόταν την στιγμή t=0.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι $I_{cm}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α. Από τους νόμους για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε:

$$F-m\cdot g\cdot ημφ-T_{στ}=m.a \quad (1)$$

$$T_{στ}\cdot R=0,5m\cdot R^2\cdot α_{γων} \quad (2)$$

$$20-10\cdot x - mgημφ- 0,5\cdot m\cdot a=m\cdot a$$

$$\text{άρα } a=(10-10x)/3 \ \text{(S.I.)} \quad (3)$$

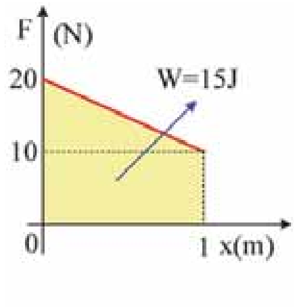
Και από την σχέση (2):

$$T_{στ}=(10-10x)/3 \ \text{(S.I.)}$$

Η συνολική δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο είναι το διανυσματικό άθροισμα της στατικής τριβής και της κάθετης αντίδρασης του δαπέδου. Για να είναι λοιπόν κάθετη η δύναμη από το δάπεδο θα πρέπει η $T_{στ}$ να γίνει ίση με το 0. Αυτό θα συμβεί όταν x=1m.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΕ για την κίνηση του κυλίνδρου από την θέση x=0 μέχρι την θέση x=1m θα έχουμε

$W_F=K_{περ}+K_{μετ}+U_w$ το έργο της δύναμης F θα βρεθεί από την παρακάτω γραφική παράσταση

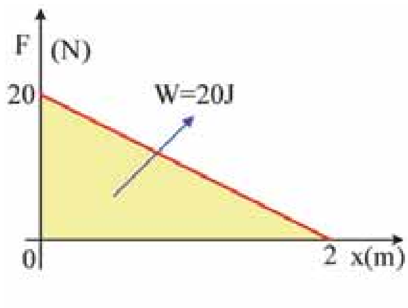


$$15=1/2\,.2.U_{cm}^2+1/2\,.1/2\,.2.U_{cm}^2+2.10.1/2$$

$$άρα\ U_{cm}=\sqrt{10/3}\ m/sec.$$

Παρατηρούμε από την σχέση (3) ότι η επιτάχυνση ήταν θετική εκείνη την στιγμή γίνεται 0 και στην συνέχεια θα γίνει αρνητική. Έτσι εκείνη την στιγμή ο κύλινδρος έχει μέγιστη ταχύτητα.

Β. Το σώμα θα φτάσει στο μέγιστο ύψος όταν η ταχύτητα του θα μηδενισθεί. Με εφαρμογή της ΑΔΕ και με την υπόθεση ότι η ταχύτητα δεν θα έχει μηδενισθεί πριν μηδενισθεί η δύναμη θα έχουμε $W_F{'}=U_w{'}$ το έργο της δύναμης θα βρεθεί από την γραφική παράσταση



$$20=2.10.H_{max} \quad \text{άρα } H_{max}=1m.$$

Το H_{max} αντιστοιχεί στο x=2m αφού ημ30ο=H_{max}/x.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι την στιγμή που μηδενίζεται η δύναμη μηδενίζεται ταυτόχρονα και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Γ. Με εφαρμογή της ΑΔΕ θα έχουμε:

$$U_w=K_{περ}'+K_{μετ}' \quad \text{άρα}$$

$$m.g.H_{max}=1/2\, m.U_{cmτελ}^2+1/2I\omega^2$$

θα πάρουμε $U_{cmτελ}=\sqrt{40/3}$ m/sec.

Μια άσκηση μεταβλητής δύναμης σε κύλινδρο

Πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή στατικής τριβής μ_s=0,5 ισορροπεί κύλινδρος μάζας M=4kg και ακτίνας R=0,1m στην θέση x=0. Στο κέντρο του κυλίνδρου αρχίζει να εφαρμόζεται μεταβλητή οριζόντια δύναμη F=20+θ (S.I) όπου θ η γωνιακή μετατόπιση του κυλίνδρου. Αρχικά ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Μέχρι τη στιγμή που ο κύλινδρος είναι έτοιμος να ολισθήσει να βρεθούν:

Α. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

Β. Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου σε συνάρτηση με την μετατόπιση του κέντρου μάζας.

Γ. Ποιος ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη στιγμή που είναι έτοιμος να ολισθήσει;

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από το κέντρο μάζας του είναι $I_{cm}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Ο κύλινδρος είναι έτοιμος να ολισθήσει όταν:

$$T_{\sigma\tau}=\mu_s.N=\mu.M.g=0,5.4.10=20N$$

Η γωνία θ συνδέεται με την μετατόπιση του κέντρου μάζας με τη σχέση x=R.θ άρα η δύναμη θα έχει μορφή:

$$F=20+10x \ \ (S.I.)$$

Από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα πάρουμε

$F-T_{στ}=M\cdot acm$ (1) και $T_{στ}\cdot R=0{,}5M\cdot R^2\cdot αγων=0{,}5Macm$ (2)

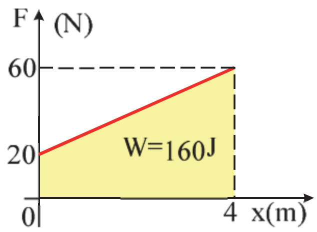
Αν διαιρέσουμε την (1) με την (2) θα έχουμε

$(F-T_{στ})/T_{στ}=2$ άρα $F=3T_{στ}$ άρα $T_{στ}=(20+10x)/3$ (S.I)

Από την συνθήκη κύλισης θα πρέπει $T_{στ}\leq μ.N$ άρα $(20+10x)/3\leq 20$ άρα $x\leq 4m$ ο κύλινδρος λοιπόν θα κυλίεται μέχρι την θέση x=4m και σε εκείνη τη θέση ετοιμάζεται να ολισθήσει.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την μετακίνηση του κυλίνδρου για 4m θα έχουμε

$W_F=K_{περ}+K_{μετ}$ το έργο της δύναμης θα βρεθεί από την παρακάτω γραφική παράσταση



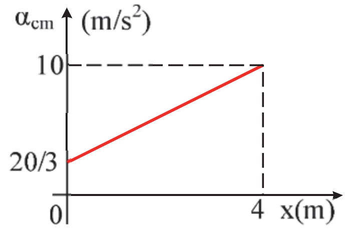
Αρα $160=1/2MU_{cm}^2+1/2Iω^2$ άρα $U_{cm}=4\sqrt{10/3}m/sec$.

B. Από την σχέση (1) με αντικατάσταση του $T_{στ}$ θα έχουμε:

$$2Tστ=Macm \text{ άρα}$$

$$2(20+10x)/3=4acm \quad \text{άρα} \quad acm=(20+10x)/6 \ (S.I.)$$

Η γραφική παράσταση θα είναι



Γ. Ο ολικός ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας θα δίνεται από την σχέση:

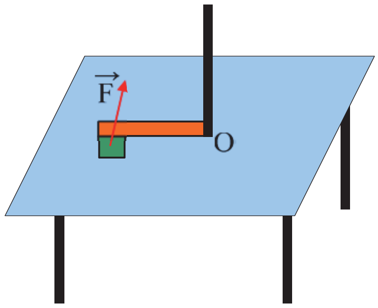
$$\Delta K/\Delta t=\Sigma F U_{cm}+\Sigma\tau.\omega=M\alpha_{cm}.U_{cm}+T_{\sigma\tau}.R\omega=(M\alpha_{cm}+T_{\sigma\tau})U_{cm}$$

και για x=4m θα πάρουμε:

$$\Delta K/\Delta t=240\sqrt{10}/3 \text{ J/sec}$$

Περιστροφή ράβδου με μεταβλητή δύναμη.

Πάνω σε οριζόντιο τραπέζι βρίσκεται ράβδος μάζας M=3Kg και μήκους l=1m.Το ένα άκρο της ράβδου O είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο άξονα ενώ στο άλλο άκρο της ράβδου έχουμε στερεώσει σώμα μάζας m=1kg που ακουμπάει στο τραπέζι. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται



παράλληλα με το τραπέζι χωρίς να βρίσκεται σε επαφή με αυτό γύρω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής της O. O συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος m και τραπεζιού είναι μ=0,4. Ασκούμε στο σώμα m μεταβλητή δύναμη F=100-10θ (S.I.) κάθετη συνεχώς στην ράβδο και παράλληλη προς το τραπέζι. Η γωνία θ είναι η γωνιακή μετατόπιση της ράβδου πάνω στο τραπέζι. Η δύναμη F παύει να ασκείται μετά τον μηδενισμό της. Να βρεθούν:

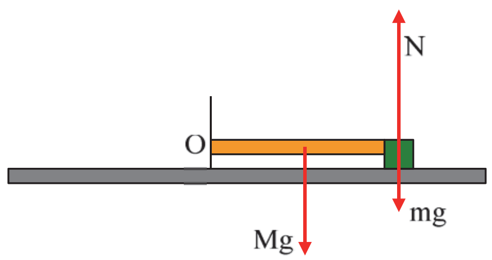
A. Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος

B. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας την στιγμή που μηδενίζεται η δύναμη

Γ. Η ολική γωνιακή μετατόπιση της ράβδου μέχρι αυτή να σταματήσει. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από τον άξονα περιστροφής της $I=1/3Ml^2$. Το σώμα m να θεωρηθεί σημειακό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Υπάρχουν δύο δυνάμεις που επηρεάζουν τη κίνηση του συστήματος. Η μεταβλητή δύναμη και η δύναμη τριβής στο σώμα m. Η δύναμη τριβής είναι T=μ.N όπου N η κάθετη αντίδραση του δαπέδου στο σώμα m. Αν πάρουμε την ισορροπία του συστήματος στον άξονα ψψ΄ με την συνθήκη των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου θα έχουμε

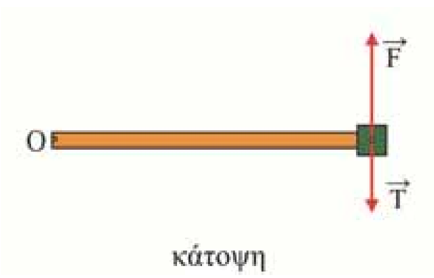


Στ(Ο)=0 άρα -Mg.L/2 –m.g.L+N.L=0 άρα

N=25N οπότε

T=0,4.25=10N.

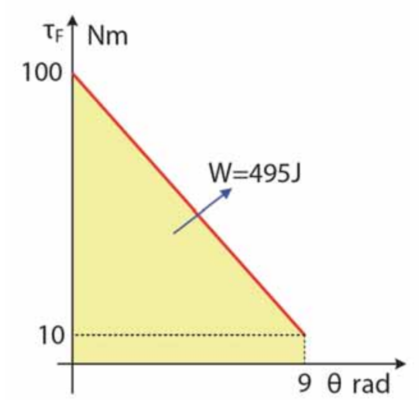
Η κίνηση λοιπόν του συστήματος είναι επιταχυνόμενη στροφική με γωνιακή επιτάχυνση που όλο και ελαττώνεται εξαιτίας της ελάττωσης της δύναμης.



Όταν $τ_F>τ_T$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη στροφικά άρα το ω αυξάνει οταν $τ_F=τ_T$ το ω παύει να αυξάνει και όταν το $τ_F<τ_T$ η κίνηση γίνεται επιβραδυνόμενη στροφικά άρα το ω αρχίζει να μειώνεται. Ετσι μέγιστη γωνιακή ταχύτητα θα έχει το σύστημα ότων $τ_F=τ_T$ δηλαδή όταν F.l=T.l δηλαδή όταν 100-10θ=10 άρα θ=9rad.

Αν εφαρμόσουμε ΘΜΚΕ για το σύστημα θα πάρουμε

$$W_{ολ}=ΔK \qquad \text{άρα } Wτ_F+Wτ_T=K_{max}$$

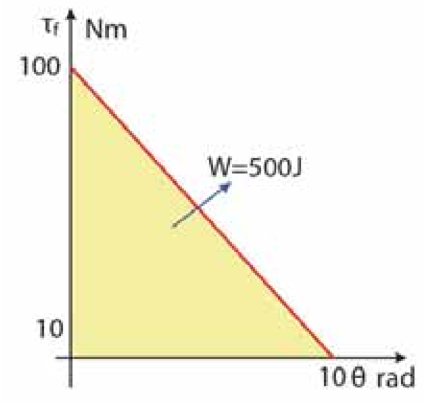


Από το εμβαδό θα υπολογίσουμε το έργο της ροπής δύναμης $Wτ_F$=495J και το έργο της ροπής της τριβής $Wτ_T$=-10.1.9=-90J

Αρα Kmax=405J

B. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τον τύπο ΔK/Δt=Στ.ω(1) Η μοναδική δύναμη που ασκεί ροπή στο σύστημα την στιγμή που καταργείται η F είναι η δύναμη της τριβής που μάλιστα αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα. Την γωνιακή ταχύτητα εκείνη τη στιγμή θα την βρούμε πάλι με ένα ΘΜΚΕ μέχρι η δύναμη να γίνει 0 δηλαδή 100-10θ=0 άρα θ=10rad.

$W_{ολ}=ΔK$ άρα $Wτ_F+Wτ_T=K$



Από το εμβαδό θα υπολογίσουμε το έργο της ροπής δύναμης $Wτ_F=500J$ και το έργο της ροπής της τριβής $Wτ_T=-10.10=-100J$.Η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι:

$$I_{ολ}=1/3ML^2+mL^2=2kg.m^2.$$

$$Αρα\ 500-100=1/2 \cdot 2 \cdot ω^2 \ άρα\ ω=20rad/sec.$$

Από την (1) θα έχουμε:

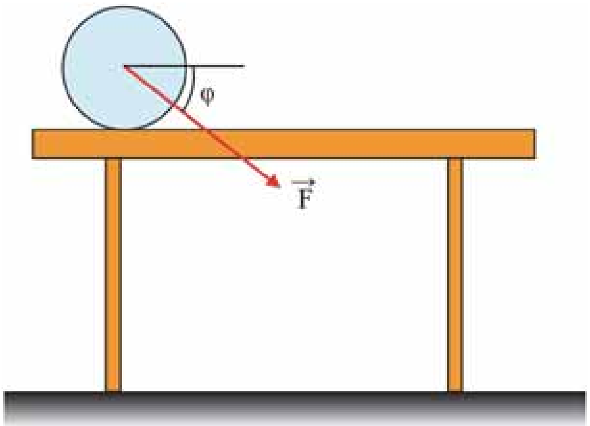
$$ΔK/Δt=-10.1.20=-200J/sec.$$

Γ. Αν εφαρμόσουμε ΘΜΚΕ για το σύστημα μέχρι αυτό να σταματήσει θα πάρουμε

$W_{ολ}=ΔK$ άρα $Wτ_F+Wτ_T=0$ άρα $500-10.1.θ΄=0$ άρα $θ΄=50rad$.

Ο Κύλινδρος κυλίεται και τελικά χάνει την επαφή.

Συμπαγής ομογενής κύλινδρος μάζας M=4Kg ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο τραπέζι ύψους H=1,25m και μήκους l=30m και στο ένα άκρο του στην θέση x=0. Ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου μεταβλητή δύναμη μέτρου $F=10\sqrt{2}+\sqrt{2}x$ (S.I.) όπου x η οριζόντια μετατόπιση του κυλίνδρου πάνω στο τραπέζι. Η δύναμη σχηματίζει γωνία 45^o με το οριζόντιο άξονα και έχει φορά προς τα κάτω. Ο κύλινδρος αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο τραπέζι. Τη στιγμή που ο κύλινδρος φτάνει στην άλλη άκρη του τραπεζιού η δύναμη παύει να ασκείται στο σώμα. Να βρεθούν:



Α. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αυτός φτάνει στην άκρη του τραπεζιού

Β. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αυτός φτάνει στην άκρη του τραπεζιού

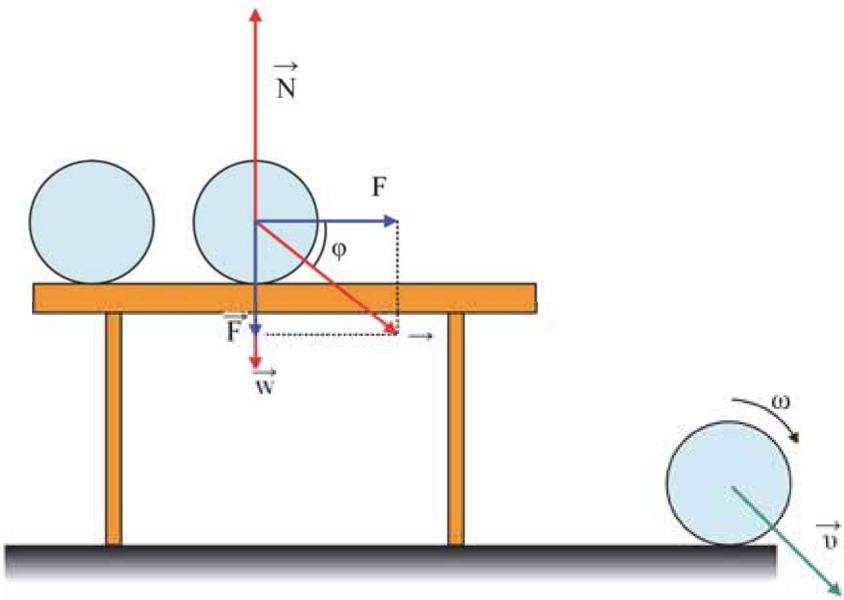
Γ. Το έργο της ροπής της στατικής τριβής

Δ. Η σχέση που πρέπει να έχει ο συντελεστής στατικής τριβής με την μετατόπιση x κυλίνδρου πάνω στο τραπέζι για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ο κύλινδρος.

Ε. Το κλάσμα της κινητικής ενέργειας λόγω της περιστροφής του κυλίνδρου προς την ολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου όταν αυτός φτάνει στο έδαφος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς το άξονα περιστροφής του I_{cm}= 0,5MR^2 και g=10m/s^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου και με θετική φορά αυτή της επιτάχυνσης κέντρου μάζας του κυλίνδρου θα πάρουμε

$$F_x - T_{στ} = m.a_{cm} \quad άρα \quad 10+x - T_{στ} = 4a_{cm} \quad (1)$$

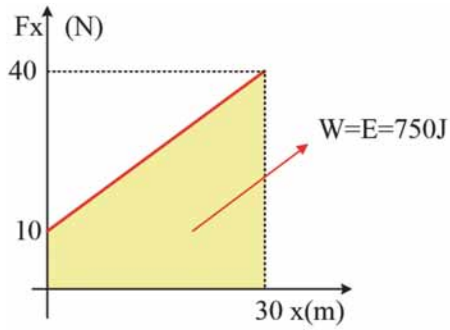
Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης προκύπτει

$T_{στ}.R=0,5MR^2.a_{cm}$ άρα $T_{στ}=2a_{cm}$ (2)

Από (1) και (2) $10+x-2a_{cm}=4a_{cm}$ (S.I.) θα πάρουμε $a_{cm}=20/3\ m/sec^2$.

B. Για την κίνηση του κυλίνδρου πάνω στο τραπέζι το θα εφαρμόσουμε ΑΔΕ και θα πάρουμε $W_F=K_{μετ}+K_{περ}$ (3) αφού το συνολικό έργο της στατικής τριβής είναι 0.

Το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί από την παρακάτω γραφική



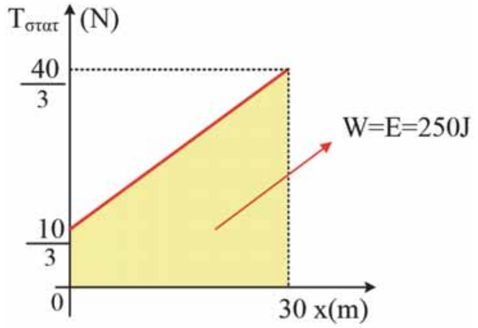
παράσταση και από το εμβαδό θα βρεθεί 750J.

Από την (3) $750=1/2\ .4.\ U^2 + ½\ .0,5\ .4.U^2$ $U=5\sqrt{10}\ m/sec$.

Γ. Κατά το σχολικό μας βιβλίο το συνολική έργο της στατικής τριβής είναι μηδέν. Η στατική τριβή αφαιρεί ενέργεια μέσω του έργο της από την μεταφορική κίνηση και προσδίδει ίση ποσότητα ενέργειας μέσω του έργου της ροπής της στατικής τριβής στην στροφική κίνηση.

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) θα πάρουμε $T_{στ}=(10+χ)/3$ (S.I.)

Το έργο της λοιπόν θα βρεθεί πάλι από της γραφική παράσταση



Το έργο των 250J το αφαιρεί η στατική τριβή από την μεταφορική κίνηση άρα το έργο που θα δίνει η στατική τριβή μέσω της ροπής της δύναμης της στην στροφική κίνηση θα είναι $W_τ$=250 J.

Δ. Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ο κύλινδρος θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$T_{στ}$<μs.N αλλά Fψ+W=N άρα 10+x + 40=N έτσι

(10+x)/3 < μ(50 + x)

Αρα θα πρέπει (10+x)/(150+x) < μs (S.I)

Μετά το χάσιμο επαφής ο κύλινδρος δέχεται μόνο την επίδραση του βάρους του έτσι θα κάνει ομαλή στροφική κίνηση δηλαδή το ω θα παραμένει σταθερό. Από την ΑΔΕ η ολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου στο έδαφος είναι το άθροισμα του W_F + $U_{βάρους}$

Ετσι

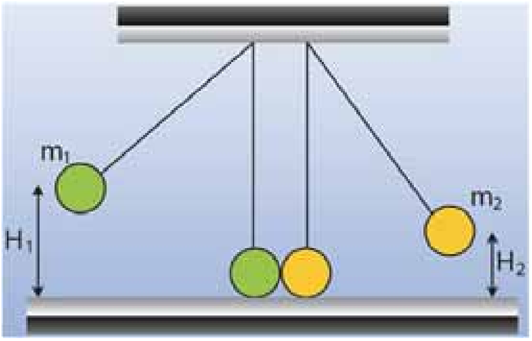
$K_{περ}$=1/2 I.$ω^2$ =1/2 .0,5 .4 .$(5\sqrt{10})^2$=250J

και $K_{ολεδαφ}$=W_F+m.g.H=750+50=800J

άρα ο λόγος Λ=250/800=0,3125

Κρούση – ολίσθηση- κύλιση

Δύο σφαίρες με μάζες m_1=3Kg και m_2=1Kg έχουν ίδιες ακτίνες $R_1=R_2$=0,2 m κρέμονται από δύο κατακόρυφα νήματα ίδιου μήκους L που είναι στερεωμένα στο ταβάνι εργαστηρίου ενώ οι σφαίρες είναι σε επαφή. Εκτρέπουμε τις δύο σφαίρες έτσι ώστε το κέντρο μάζας της κάθε σφαίρας να ανέβει κατακόρυφα κατά ύψη H_1=0,45m και H_2=0,2m όπως στο παρακάτω σχήμα:



Κάποια στιγμή αφήνουμε τη μία και μετά από λίγο την άλλη με αποτέλεσμα κάποια δεύτερη χρονική στιγμή οι δύο σφαίρες να συγκρουστούν κεντρικά και ελαστικά ενώ τα νήματα είναι κατακόρυφα. Ελάχιστα πριν την κρούση τα νήματα κόβονται ταυτόχρονα ενώ το κατώτερο σημείο της κάθε σφαίρας βρίσκεται σε επαφή με οριζόντιο έδαφος που παρουσιάζει συντελεστή τριβή ολίσθησης μ=2/5 .

Να βρεθούν:

A. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας των δύο σφαιρών πριν και αμέσως μετά την κρούση
B. Η μέγιστη ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης των δύο σφαιρών στην διάρκεια της κρούσης

Γ. Η χρονική στιγμή που θα αρχίσει η καθαρή κύλιση για κάθε σφαίρα μετά το τέλος της κρούσης

Δ. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των δύο κέντρων μάζας των δύο σφαιρών όταν οι σφαίρες κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν.

Δίνεται $I_{cm}=0,4MR^2$ & $g=10m/s^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ $MgH= ½ Mυ^2$ για τίς δύο σφαίρες θα βρούμε τα μέτρα των δύο ταχυτήτων των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών πριν την κρούση $υ_1=3m/s$ & $υ_2=2m/s$.

Με την βοήθεια των τύπων της ελαστικής κρούσης δύο σφαιρών που συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά θα έχουμε

$$υ_1΄=(m_1-m_2)υ_1/(m_1+m_2) + 2m_2υ_2/(m_1+m_2)=0,5m/s$$
$$υ_2΄=(m_2-m_1)υ_2/(m_1+m_2) + 2m_1υ_1/(m_1+m_2)=5,5m/s$$

Β. Κατά την διάρκεια της κρούσης οι δύο σφαίρες αρχίζουν να παραμορφώνονται. Η μέγιστη παραμόρφωση θα συμβεί την στιγμή που οι δύο σφαίρες αποκτήσουν την ίδια ταχύτητα.

Με τη βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε::

$m_1υ_1-m_2υ_2=(m_1+m_2)υ_κ$ και μετά τις πράξεις $υ_κ=1,75m/s$

Με εφαρμογή της ΑΔΕ θα έχουμε

$$½m_1υ_1^2+½m_2υ^2=½ (m_1+m_2)υ_κ^2 +U_{max}$$

θα βρούμε μετά τις πράξεις U_{max}=9,375J

Γ. Μετά το τέλος της κρούσης και οι δύο σφαίρες κινούνται μόνο μεταφορικά προς τα δεξιά με αποτέλεσμα να εμφανιστεί τριβή ολίσθησης προς τα αριστερά στη κάθε σφαίρα. Έτσι η κάθε σφαίρα θα αρχίσει να επιταχύνεται στροφικά μέχρι την χρονική στιγμή που θα αρχίσει η καθαρή κύλιση. Έτσι με βάση τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική και την μεταφορική κίνηση θα έχουμε για την κάθε σφαίρα

$$T_{ολ}R=0,4MR^2\alpha_{γων} \quad (1)$$

$$T_{ολ}=Ma \quad (2)$$

με την επίλυση των (1) και (2) θα βρούμε $\alpha_{γων}=50r/s^2$ $a=4m/s^2$

Η καθαρή κύλιση θα συμβεί όταν η ταχύτητα του κατώτερου σημείου της κάθε σφαίρας θα μηδενιστεί δηλαδή $\upsilon_{cm}=\upsilon_{περ}$ άρα υ_o-at=$\alpha_{γων}$tR και μετά την αντικατάσταση για κάθε σφαίρα θα έχουμε t_1=1/28 s και t_2=11/28 s.

Δ. Η απόσταση των δύο κέντρων μάζας καθορίζεται από τη σχέση $S_{cm}=x_{cm2}-x_{cm1}$ άρα ο ρυθμός μεταβολής αυτής της απόστασης θα είναι $\Delta S_{cm}/\Delta t=\upsilon_{cm2}-\upsilon_{cm1}$ (3)

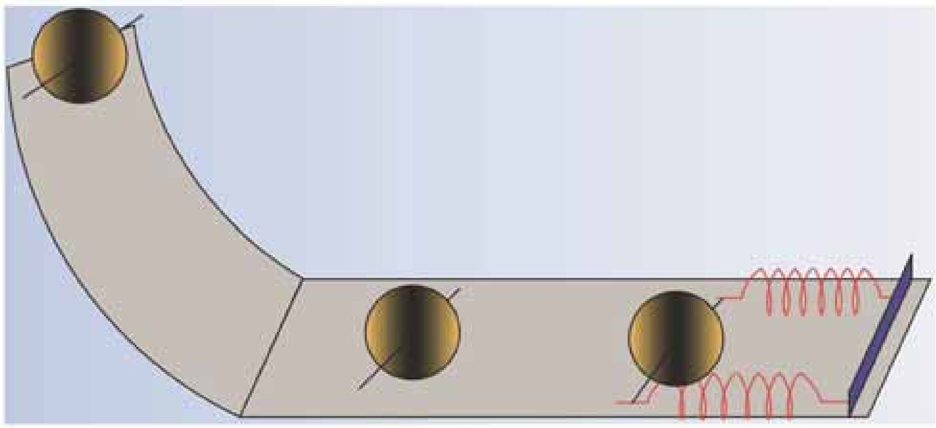
Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της κάθε σφαίρας θα δίνεται από τη σχέση της ταχύτητας στην επιβραδυνόμενης κίνησης $\upsilon=\upsilon_o$-at άρα για κάθε σφαίρα θα έχουμε υ_{cm2}=55/14 m/s

και υ_{cm2}=5/14 m/s και με τη βοήθεια της σχέσης (3)

$$\Delta x_{cm}/\Delta t=25/7 \text{ m/s}$$

Κύλιση σε τεταρτοκύκλιο και ταλάντωση

Από την κορυφή ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ακτίνας R=1,95m αφήνουμε ελεύθερη μία σφαίρα μάζας M=2Kg και ακτίνας r=0,2m. Η σφαίρα έχει περασμένη συμμετρικά, μία αβαρή βελόνα μήκους L>2r η οποία είναι οριζόντια και περνάει από το κέντρο της σφαίρας. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο τετρτοκύκλιο και την στιγμή t=0 μπαίνει σε οριζόντιο επίπεδο και αφού διανύσει οριζόντια απόσταση S=10m συναντάει χωρίς απώλεια ενέργειας ταυτόχρονα δύο οριζόντια ελατήρια σταθεράς K=1750N/m που απέχουν μεταξύ τους απόσταση L. Αν σε όλη την διάρκεια της κίνησης της σφαίρας η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει να βρεθούν:



Α. Η μέγιστη συσπείρωση των ελατηρίων

Β. Ο χρόνος που το κέντρο μάζας της σφαίρας κινείται ευθύγραμμα

Γ. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για όσο χρόνο η σφαίρα κινείται ευθύγραμμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική κατάσταση στην τελική θα έχουμε

$Mg(R\text{-}r)= ½ \cdot 2K\cdot x_{max}2$ μετά τις πράξεις θα βρούμε $x_{max}=10\sqrt{2}$ cm

Β. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κίνηση στο τεταρτοκύκλιο θα έχουμε

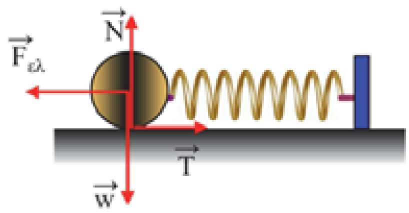
$Mg(R\text{-}r)= 1/2\ Mυ^2 + ½\ Iω^2$ μετά τις πράξεις θα βρούμε υ=5m/s και ω=25r/s

Η κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο είναι ομαλή μεταφορική και ομαλή στροφική. Μετά την επαφή με τα ελατήρια θα έχουμε για την στροφική και μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$TR=2/5\ MR^2α_{γων}$ (1) $2Kx\text{-}T=ma$ (2)

Για την ΓΑΤ έχουμε:

$ΣF=T\text{-}2Kx =-\dfrac{10}{7}K\cdot x=-2500x$



Ετσι το κέντρο μάζας το σώματος θα κάνει μέρος ΓΑΤ για όσο χρόνο η βελόνα της σφαίρα βρίσκεται σε επαφή με τα ελατήρια.

Ο χρόνος αυτός θα είναι $T/2=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{50}$ sec.

Ο συνολικός χρόνος της ομαλής κίνησης θα είναι 2S=υ·t΄ άρα t΄=4s

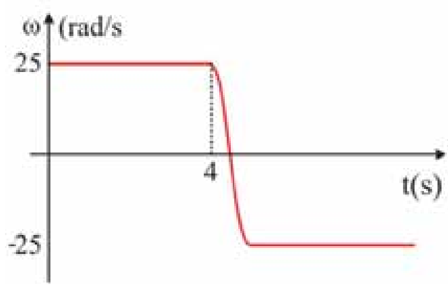
Ετσι ο ζητούμενος χρόνος θα είναι $t=(4 + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{50})$ sec

Γ. Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι ω=25r/s σταθερή για 2s μέχρι η σφαίρα να συναντήσει τα ελατήρια. Μετά την επαφή το κέντρο μάζας της σφαίρας εκτελεί ΓΑΤ. Ετσι και η γωνιακή ταχύτηταμειώνεται για χρόνο Τ/4 σύμφωνα με τη σχέση

Ω= $25\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi(t-2)}{T}\right)$

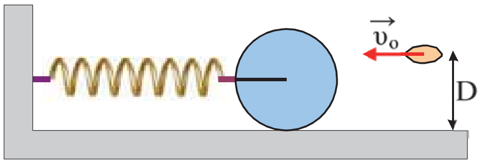
Μετά τον μηδενισμό της ταχύτητας της σφαίρας η σφαίρα αρχίζει τώρα να περιστρέφεται αριστερόστροφα μέχρι τα ελατήρια να φτάσουν στην θέση φυσικού τους μήκους

Ω=- $25\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi(t-2-T/4)}{T}\right)$ και για χρόνο Τ/4



Κρούση – Ταλάντωση - Κύλιση

Η ξύλινη σφαίρα του παρακάτω σχήματος έχει μάζα M=1 kg και ακτίνα R= 0,1m .Η σφαίρα είναι δεμένη με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς K=14000N/m στο κέντρο της κατά τέτοιο τρόπο ώστε η σφαίρα να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας. Σημειακό βλήμα έχει μάζα m=0,1Kg και κινείται με οριζόντια ταχύτητα U_o= 200m/sec σε απόσταση D> R πάνω από οριζόντιο έδαφος. Την χρονική



στιγμή t=0 το βλήμα διέρχεται ακαρικαία μέσα από την σφαίρα και εξέρχεται από αυτή με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $U_o/2$. Το αποτέλεσμα της κρούσης αυτής είναι η σφαίρα να αρχίσει αυτόματα μετά την κρούση να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να βρεθούν:

A. Η απόσταση D, αν υποθέσουμε ότι δεν θα αναπτυχθεί στατική τριβή από το έδαφος στην διάρκεια της κρούσης
B. Το είδος της κίνησης του κέντρου μάζας της σφαίρας καθώς και η περίοδος της κίνησης του κέντρου μάζας.
Γ. Το ποσό ενέργειας που «χάθηκε» κατά την παραπάνω κρούση.
Δ. Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής της σφαίρας.

Για την σφαίρα $I_{cm}=0,4M.R^2$ και ημ2φ=2ημφσυνφ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Επειδή η σφαίρα μετά την κρούση κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει θα πρέπει να ισχύει η σχέση $U_{cm}=\omega.R$ (1)

Με την βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε

$m.Uo = M.U_{cm} + m.U_o/2$ άρα $U_{cm}=10m/sec$ και από την σχέση (1)

$$\omega=100r/sec$$

Με την βοήθεια της ΑΔΣ θα έχουμε

$$m.U_o(D-R)=I.\omega + m.U_o(D-R)/2 \text{ άρα } D=0{,}14m$$

Β. Για την περιστροφική κίνηση της σφαίρας παίρνουμε την σχέση $T_{στ}.R=0{,}4.M.R^2.α_{γων}$ άρα $T_{στ}=0{,}4M.a_{cm}$ (2)

Για την μεταφορική κίνηση της σφαίρας $F_{ελ}-Tστ=M.a_{cm}$ (3)

Από την (2) και (3) $T_{στ}=2Kx/7$ (4)

Θεωρώντας θετική τη φορά της αρχικής ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας $ΣF=T_{στ}-F_{ελ}=2Kx/7 – Kx=-5Kx/7$ άρα η κίνηση του κέντρου μάζας είναι γ.α.τ. με $D=5K/7=10000N/m$ άρα η περίοδος της κίνησης θα είναι $T=2\pi\sqrt{M/D}=\pi/50$ sec

Γ. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κρούση θα έχουμε

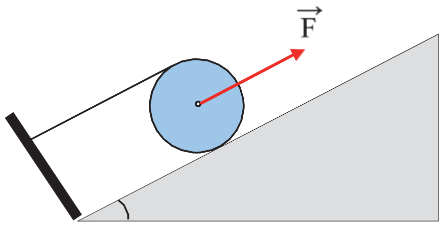
$½.m.U_o^2 = 1/2.m(U_o/2)^2 + 1/2.M.U_{cm}^2 + 1/2.I.\omega^2 + Q_{κρ}$ άρα μετά από πράξεις $Q_{κρ}=1430J$

Δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής δίνεται από την σχέση

$ΔK_{περ}/Δt=Στ.\omega=T_{στ}.R.\omega= - 2K.x.U/7=-2K.A.ημωt .\omega.A.συνωt/7 =-K.A^2.\omega.ημ2ωt/7$ $U_{cm}=\omega.A$ άρα $A=0{,}1m$ άρα $ΔK_{περmax}/Δt=2000J/sec$.

100^{η} ανάρτηση: Μια ιδιόμορφη κύλιση.

Κύλινδρος μάζας M=10Kg και ακτίνας R=0,5m αρχίζει την στιγμή t=0 να ανέρχεται κυλιόμενος (αριστερόστροφα) χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος αρχικά λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^{o}$ με τη βοήθεια σταθερής δύναμης F=80N, που ασκείται στο κέντρο του κυλίνδρου και είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και λεπτότατου σκοινιού που είναι τυλιγμένο στο κύλινδρο και είναι δεμένο στην αρχή του κεκλιμένου επιπέδου. Το νήμα ξετυλίγεται από τον κύλινδρο και είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή t_1=5sec το νήμα κόβεται και η δύναμη F καταργείται. Εκείνη την στιγμή το επίπεδο γίνεται μη λείο με συντελεστή τριβής μ=√3/3. Να βρεθούν:



A. Η ταχύτητα του σημείου επαφής του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο τη χρονική στιγμή t_1.
B. Το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου σε σχέση με την αρχική του θέση.
Γ. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αυτός επιστρέψει στην θέση όπου βρισκόταν την χρονική στιγμή t=0.

   Δίνεται για τον κύλινδρο $I_{cm}=0,5M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Από τους νόμους κίνησης για την μεταφορική και στροφική κίνηση θα έχουμε

$$F\text{-}Mg\eta\mu\varphi\text{-}T=M.a \quad (1) \quad T.R=0{,}5M.R^2.a_{\gamma\omega\nu} \text{ άρα } T=0{,}5.M.a \quad (2)$$

Από την λύση των (1) και (2) θα βρούμε $a=2m/sec^2$

Το διάστημα που θα έχει διανύσει ο κύλινδρος θα είναι

$S_1=1/2a.t_1^2=25m$ και η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα είναι $U_{cm}=a.t_1=10m/sec$. Η ταχύτητα λόγω περιστροφής θα είναι επίσης $U_{\pi\varepsilon\rho}=10m/sec$ γιατί ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει αριστερόστροφα βέβαια. Δηλαδή το σημείο που είναι δεμένο στο νήμα έχει ταχύτητα 0 και το σημείο που βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο έχει ταχύτητα $2U_{cm}=20m/s$. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητα του κυλίδρου θα είναι $\omega=U_{\pi\varepsilon\rho}/R=20r/sec$.

Β. Την στιγμή t_1 κόβεται το νήμα και παύει να ασκείται η δύναμη. Το σημείο επαφής όμως με το δάπεδο έχει συνολική ταχύτητα 20m/sec με φορά προς τα πάνω. Ετσι θα αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης με φορά προς τα κάτω μέχρι να αρχίσει (αν αρχίσει) η καθαρή κύλιση. Έτσι ο κύλινδρος εκτελεί επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους και της τριβής ολίσθησης και επιβραδυνόμενη στροφική εξαιτίας της ροπής της τριβής ολίσθησης. Από τους νόμους της κίνησης θα έχουμε

$$M.g.\eta\mu\varphi+\mu.M.g\sigma\upsilon\nu\varphi=M.a_2$$

$$\text{άρα } a_2=10m/sec^2 \text{ και } \mu.M.g.\sigma\upsilon\nu\varphi.R=0{,}5M.R^2.a_{\gamma\omega\nu}$$

άρα $α_{γων}=20r/s^2$.

Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του κυλίνδρου η ταχύτητα του κέντρου μάζας του θα είναι 0.

Έτσι από τον νόμο της ταχύτητας θα έχουμε $0=10-10t_2$ άρα $t_2=1sec$. Την ίδια στιγμή η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου θα είναι $ω΄=ω-α_{γων}.t_2$ άρα $ω΄=0r/sec$. Δηλαδή ταυτόχρονα με την μεταφορική σταματάει και η στροφική κίνηση του κυλίδρου.

Το μήκος της διαδρομής που διανύει ο κύλινδρος μετά την κατάργηση της δύναμης θα βρεθεί από την σχέση του διαστήματος για την επιβραδυνόμενη κίνηση:

$$S_2=U_{cm}.t_2-1/2a_2\,t_2^2=5m.$$

Αρα το συνολικό μήκος της διαδρομής θα είναι:

$$S_{ολ}=25+5=30m \qquad \text{άρα το } H_{max}=S_{ολ}/2=15m.$$

Γ. Αν υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος κυλίεται (αριστερόστροφα) προς τα κάτω θα ισχύουν οι νόμοι της κίνησης

$$M.g.ημφ-T_{στ}=M.a_3 \qquad (3)$$

$$T_{στ}.R=0,5.M.R^2.α_{γων2}$$

$$\text{άρα } T_{στ}=0,5.M.a_3 \ (4)$$

από τις εξισώσεις (3) και (4) θα βρούμε

$$a_3=10/3\ m/sec^2 \text{ και } T_{στ}=100/6\ N$$

Για να κυλιέται ο κύλινδρος θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κύλισης

$T_{στ}$<μ.Ν δηλαδή 100/6<50 που ισχύει άρα και ο κύλινδρος αρχίζει να κατέρχεται κυλιόμενος χωρίς να ολισθαίνει.

Μετά όμως από διαδρομή 5m θα μπει σε περιοχή όπου δεν υπάρχουν τριβές. Από εκεί και μετά θα πάψει να υπάρχει η στατική τριβή και θα εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους αλλά θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση αφού πλέον δεν θα υπάρχει καμία δύναμη που να προκαλεί ροπή.

Με την βοήθεια των εξισώσεων κίνησης για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε: $S_2=1/2a_3.t_3^2$ άρα $t_3=\sqrt{3}sec$ και $Ucm=a_3.t_3=10\sqrt{3}/3$ m/sec.

Μετά την είσοδο στο λείο επίπεδο με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε

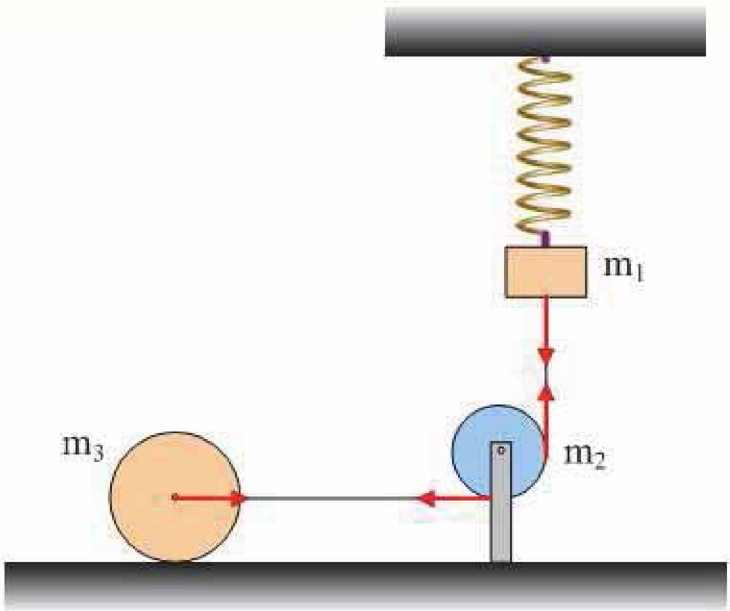
$$M\cdot g\cdot S_1/2 \;+1/2\cdot M\cdot Ucm^2 +1/2\cdot I\cdot \omega^2=1/2\cdot M\cdot Ucm_2^2 +1/2\cdot I\cdot \omega^2$$

και μετά από πράξεις θα έχουμε:

$$Ucm_2\approx 16{,}8 m/sec.$$

Μια ταλάντωση αλλά και μια κύλιση κυλίνδρου

Δίνεται το παρακάτω σχήμα



Το ελατήριο έχει σταθερά K=100N/m είναι κατακόρυφο και το σώμα μάζας M_1=1Kg ισορροπεί. Συνδέουμε το σώμα μάζας M_1 μέσω αβαρούς νήματος και στερεωμένης στο έδαφος τροχαλίας μάζας M_2=4Kg με το κέντρο κυλίνδρου μάζας M_3=2Kg που μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Εφαρμόζοντας κατάλληλη εξωτερική δύναμη στον κύλινδρο επιμηκύνουμε επιπλέον το ελατήριο κατά χ_2=20cm.Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να βρεθούν:

A. Η επιτάχυνση του κυλίνδρου σαν συνάρτηση της μετατόπισης του.
B. Η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Γ. Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος M_1 μετά την χαλάρωση του νήματος.

Δίνεται για την τροχαλία και για τον κύλινδρο $I_{cm}=0,5M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Εφαρμόζουμε για τον κύλινδρο τους νόμους για την κίνησή του:

$$T_1-T_{στ}=M_3.a \quad (1)$$

και $T_{στ}.R=0,5.M_3.R^2.α_{γων}$ άρα $T_{στ}=a$ (S.I.) και από την (1) $T_1=3a$ (S.I.)

Για την τροχαλία:

$$T_2.R_2-T_1.R_2=0,5.M_2.R^2.α \qquad \text{άρα}$$

$$T_2=5a \text{ (S.I.) } (2)$$

Για το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο θα πάρουμε από την αρχική ισορροπία $M_1.g=K.x_1$ άρα $x_1=0,1m$ και για την κίνηση στην συνέχεια:

$$F_{ελ}-T_2-M_1.g=M_1.a$$

$$\text{άρα } K(χ_1+x΄)-T_2-M_1.g=M_1.a$$

όπου x΄ η επιπλέον επιμήκυνση του ελατηρίου. Με την βοήθεια της (2) θα φτάσουμε $a=100x΄/6$ (S.I.) για $0\leq x΄\leq 0,2m$.

Το $x΄=x-0,2$ (S.I) όπου x η μετατόπιση του κυλίνδρου στο οριζόντιο δάπεδο.

Για $x΄<0m$ το νήμα χαλαρώνει και ο κύλινδρος κινείται ομαλά στροφικά και μεταφορικά, η τροχαλία ομαλά στροφικά ενώ το σώμα M_1 θα εκτελεί γ.α.τ. .

Β. Η επιτάχυνση του κυλίνδρου μειώνεται συνεχώς. Ετσι ο κύλινδρος εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική και στροφική κίνηση με επιτάχυνση που συνεχώς ελλατώνεται. Ετσι η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει ο κύλινδρος θα είναι στην θέση $x'=0$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σύστημα θα έχουμε

$$½.K(x_1+x')^2 = ½.M_3.U^2 + ½.I_3.\omega_3^2 + ½.I_2.\omega_2^2 + ½.M_1.U^2 + M_1.g.x' + ½.K.x_1^2$$

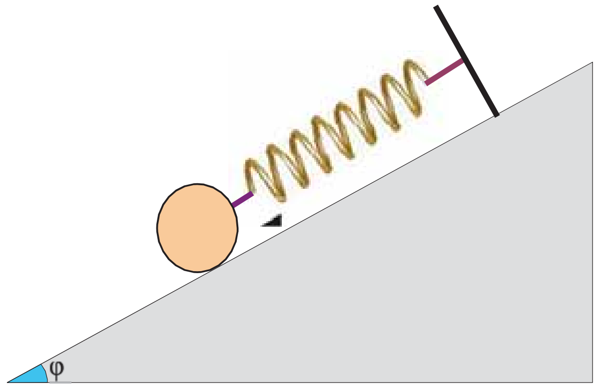
Θα βρεθεί $\upsilon=\sqrt{2}/3$m/sec.

Γ. Την στιγμή που το νήμα χαλαρώνει το σώμα M_1 έχει ταχύτητα $U=\sqrt{2}/3$m/sec.Η ταχύτητα αυτή είναι στην ΘΙΤ άρα είναι η μέγιστη για την ταλάντωση.

Άρα $U=\omega.A$ άρα $A=\sqrt{2}/30$ m.

Ο κύλινδρος κυλίεται εκτελώντας ταλάντωση

Πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $φ=30^{o}$ και με την βοήθεια ελατηρίου σταθεράς K=700N/m μπορεί να ισορροπεί σφαίρα μάζας M=5Kg. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο ενώ το κάτω άκρο είναι στερεωμένο σε άξονα που περνάει από το κέντρο της σφαίρας και είναι συνεχώς παράλληλος με το κεκλιμένο επίπεδο. Ανεβάζουμε την σφαίρα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο έτσι ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και αφήνουμε ελεύθερη την σφαίρα. Η σφαίρα σε όλη την διάρκεια της κίνησή της κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.



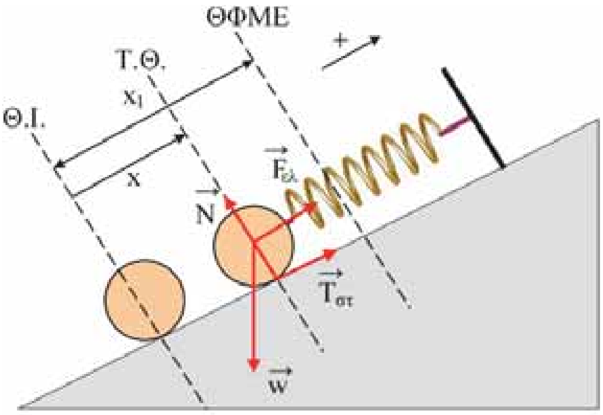
Α. Να αποδειχθεί ότι το κέντρο μάζας της σφαίρας θα εκτελέσει γ.α.τ. και να υπολογιστεί η περίοδός του.

Β. Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας.

Γ. Να βρεθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια της σφαίρας με την βοήθεια και της ΑΔΕΤ αλλά και της ΑΔΕ.

Δίνεται για την σφαίρα το $I_{cm}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



A. Για την θέση ισορροπίας ισχύει η $Mgημθ=K·x_1$ (1)

Για την τυχαία θέση του σχήματος ισχύει

$$ΣF=T_{στ}– Mg·ημθ+K(x_1-x) \quad (2)$$

Αν εφαρμόσουμε τώρα τους νόμους της κίνησης για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα πάρουμε

$$Mgημθ-K(x_1-x)-T_{στ}=M.\ a \quad (3)$$

$$T_{στ}·R=0,4MR^2·α_{γων} \quad (4)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις θα βρεθεί:

$$ΣF= -5kx/7 = -500·x \ (S.I)$$

άρα το κέντρο μάζας της σφαίρα εκτελεί γ.α.τ. με D=500N/m και περίοδο T=π/5sec.

Β. Από την (1) θα βρεθεί το $x_1=5/140$ m. Η απόσταση αυτή αποτελεί και το πλάτος ταλάντωσης του κέντρου μάζας της σφαίρας γιατί η Θ.Φ.Μ.Ε. αποτελεί και τη Θ.Μ.Α. για την γ.α.τ.

Αρα

$$\upsilon_{cmmax}=\omega\cdot A=5/14 \text{ m/s}.$$

Γ. Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ $K_{maxμετ}=U_{max}=½\, D\, A^2=125/392$ J

$$K_{περ}=½\, I\, \omega^2=50/392 \text{ J}$$

Αρα

$$K_{ολmax}=175/392 \text{ J}.$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ $U_w=U_{ελ}+K_{ολmax}$ άρα

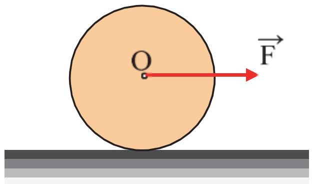
$$Mgh=½\, K\, x_1^2+K_{ολmax}$$

θα πάρουμε και πάλι

$$K_{ολmax}=175/392 \text{ J}$$

Ο κύλινδρος ολισθαίνει και τελικά κυλίεται

Πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή στατικής-οριακής τριβής $\mu_s=\mu=0{,}5$ ισορροπεί κύλινδρος μάζας M=4kg και ακτίνας R=0,1m. Στο κέντρο του κυλίνδρου αρχίζει να εφαρμόζεται μεταβλητή οριζόντια δύναμη F=100-10x (S.I) όπου x η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου αν την στιγμή t=0 βρισκόταν στην θέση x=0.



Α. Να εξηγηθεί η κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα.
Β. Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αρχίζει η καθαρή κύλιση.
Γ. Να βρεθεί το συνολικό έργο της τριβής μέχρι ο κύλινδρος να αρχίσει την καθαρή κύλιση.
Δ. Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η δύναμη θα μηδενισθεί.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από το κέντρο μάζας του είναι $I_{cm}=0{,}5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Αν υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος εκτελούσε σύνθετη κίνηση θα έπρεπε από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση να πάρουμε:

$$F\text{-}T_{στ}=M.a_{cm} \ (1) \ \text{και} \ T_{στ}.R=0{,}5M.R^2.a_{γων}=0{,}5Ma_{cm} \ (2)$$

Αν διαιρέσουμε την (1) με την (2) θα έχουμε

$$(F\text{-}T_{στ})/T_{στ}=2$$

$$\text{άρα } F=3T_{στ} \quad \text{άρα } T_{στ}=(100\text{-}10x)/3 \ (S.I)$$

$$\text{Αρα για } x=0$$

$$T_{στ}=100/3 \ N.$$

Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί γιατί δεν ισχύει η συνθήκη κύλισης δηλαδή $T_{στ}<μ.N$. Ετσι το σώμα δεν κυλίεται αλλά εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση εξαιτίας της συνολικής δύναμης ΣFx και επιταχυνόμενη στροφική κίνηση εξαιτίας της τριβής ολίσθησης. Με τους παραπάνω νόμους

$F\text{-}μ.N=Ma_{cm} \rightarrow 100\text{-}10x\ \text{-}20=4acm$ και άρα $a_{cm}=20\text{-}2{,}5x$ (S.I).

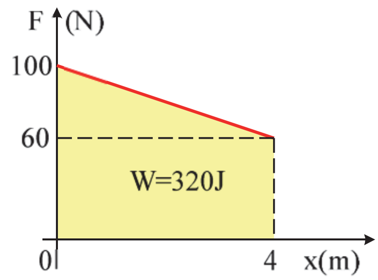
Για την στροφική κίνηση θα έχουμε:

$$T.R=0{,}5M.R^2.a_{γων} \ \text{ άρα } \ α_{γων}=100r/sec^2.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η acm μικραίνει ενώ η αγων παραμένει σταθερή για το χρονικό διάστημα που το σώμα ολισθαίνει προσπαθώντας να κυλίσει. Οταν όμως το acm γίνει ίσο με το αγων.R τότε θα αρχίσει η καθαρή κύλιση.

Ετσι 20-2,5x=100.0,1 άρα x=4m.

B. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την μετακίνηση του κυλίνδρου για 4m θα έχουμε $WF+WT_{ροπης}=K_{περ}+K_{μετ}+Q_{τριβής}$ το έργο της δύναμης θα βρεθεί από την παρακάτω γραφική παράσταση



Επειδή το $WT_{ροπής}=K_{περ}$ θα έχουμε

$$320=½\ M\ U_{cm}^2+μ\ N\ x \quad άρα\ U_{cm}=\sqrt{120}m/sec.$$

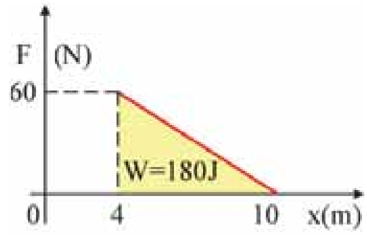
Γ. Το έργο της ροπής της δύναμης της τριβής ολίσθησης θα γίνει τελικά $K_{περ}$ άρα $WT_{ροπής}=K_{περ}=½\ I\ ω^2=120J$. Το έργο της τριβής στην μεταφορική κίνηση είναι αρνητικό αφού αφαιρεί ενέργεια από τον κύλινδρο $WT=-μ\ N\ x=-80J$.

Αρα το συνολικό έργο της τριβής είναι $WT_{ολ}=40J$.

Δ. Όταν αρχίζει ο κύλινδρος να κυλίεται το έργο της στατικής τριβής είναι μηδέν. Ετσι εφαρμόζοντας ΑΔΕ για την κύλιση του κυλίνδρου από την θέση x=4m μέχρι την θέση όπου η F=0 δηλαδή μέχρι x=10m θα έχουμε

$$WF+K_{περ}+K_{μετ}=K_{περ'}+K_{μετ'}$$

Το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί από το περικλειόμενο εμβαδό του σχήματος



$$W_F+\frac{1}{2} M U_{cm}^2+\frac{1}{2} I \omega^2=\frac{1}{2} M U_{cm2}^2+\frac{1}{2} I \omega_2^2$$

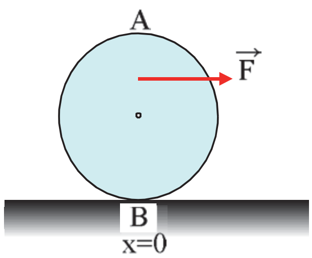
Άρα $180+240+120=\frac{1}{2}\, 4\, U_{cm2}^2+1/4\; 4\, U_{cm2}^2$

άρα

$U_{cm2}=\sqrt{180}$ m/sec

Κύλιση κυλίνδρου, χωρίς τριβές.

Ένας συμπαγής και ομογενής κύλινδρος ακτίνας R=0,3m και μάζας m=4kgr ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στην κατακόρυφη διάμετρο ΑΒ και σε απόσταση ψ από το κατώτερο σημείο Β εφαρμόζουμε την στιγμή t=0 μεταβλητή οριζόντια δύναμη F=20+8x (S.I) όπου x η οριζόντια μετατόπιση του κυλίνδρου από το σημείο x=0 όπου βρίσκεται την χρονική στιγμή t=0. Ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.



Να βρεθούν:

Α. Η κατακόρυφη απόσταση ψ

Β. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου στη θέση x=10m

Γ. Την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η ταχύτητα του κέντρου μάζας του είναι U_{cm}=20m/sec.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από το κέντρο μάζας του είναι $I_{cm}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε λείο επίπεδο έτσι από τους νόμους για την μεταφορική και την στροφική κίνηση θα πάρουμε

$$F=M.a_{cm} \quad (1) \quad F(\psi-R)=0{,}5M.R^2.a_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αν διαιρέσουμε τις παραπάνω σχέσεις θα πάρουμε $\psi-R=R/2$ άρα

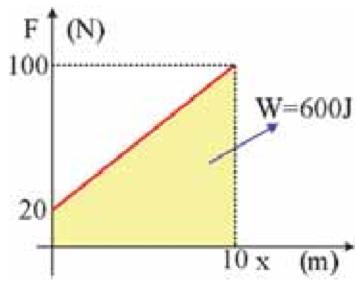
$$\psi=0{,}45m$$

Β . Από την ΑΔΕ για την κίνηση του κυλίνδρου θα έχουμε

$$WF_{o\lambda}=K_{\pi\varepsilon\rho}+K_{\mu\varepsilon\tau} \quad (3)$$

Το έργο της δύναμης για την μεταφορική κίνηση θα δίνεται από τη σχέση $dWF_{\mu\varepsilon\tau}=F.dx$ ενώ το έργο της ροπής της δύναμης για περιστοφική κίνηση θα είναι $dW_{\rho o\pi\acute{\eta}\varsigma}=FR'd\varphi=F(\psi-R)/Rdx=Fdx/2$ δηλαδή το μισό του παραπάνω έργου.

Το έργο της μεταβλητής δύναμης για την μεταφορική κίνηση θα βρεθεί από το περικλειόμενο εμβαδό του παρακάτω σχήματος



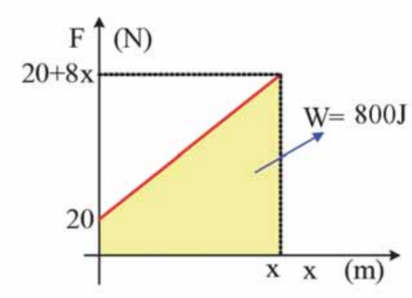
Από την (3) $W_{o\lambda}=1/2M.U_{cm}^2+1/2I\omega^2$ με αντικατάσταση θα έχουμε $600+300=2U^2+U^2$ άρα $U_{cm}=10\sqrt{3}m/sec$.

Γ. Αν εφαρμόσουμε την ΑΔΕ μέχρι το σώμα να αποκτήσει ταχύτητα $U_{cm}=20m/sec$ θα έχουμε

$$W_{ολ}=1/2M.U_{cm}^2+1/2I\omega^2$$

$$\text{Αρα } W_{ολ}=1/2M.U_{cm}^2+1/4MR^2\omega^2 \text{ άρα } W_{Fολ}=1200J.$$

Κάνοντας και πάλι τη γραφική παράσταση της δύναμης με τη μετατόπιση x και θεωρώντας ότι το έργο κατά την μεταφορική κίνηση είναι διπλάσιο του έργου της ροπής της δύναμης θα πρέπει η γραφική παράσταση να μας δώσει εμβαδό $WF_{μετ}$=800J



800=(20+20+8x)x/2

θα καταλήξουμε στην δευτεροβάθμια $x^2+5x-200=0$ με δεκτή λύση την x=11,86m.

Από την σχέση (1) θα έχουμε $20+8.x=4a_{cm}$ άρα $\alpha_{cm}=28,72m/sec^2$

Κύλιση μικρής σφαίρας πάνω σε μεγάλη

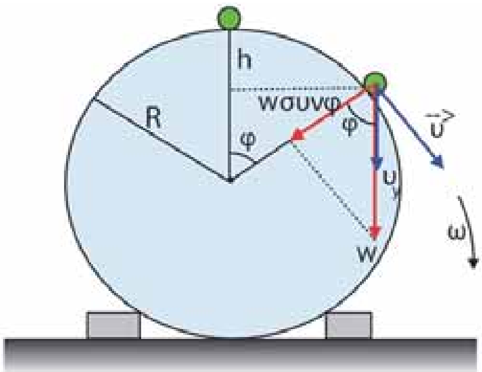
Στο ανώτερο σημείο και στην εξωτερική επιφάνεια μιας ακλόνητης σφαίρας ακτίνας R=17m που είναι στερεωμένη στο έδαφος βρίσκεται μικρότερη σφαίρα ακτίνας r=10cm. Κάποια στιγμή η μικρή σφαίρα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στην μεγάλη σφαίρα. Να βρεθεί η γωνιακή μετατόπιση της μικρής σφαίρας μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Δίνονται : Αν συνφ=10/17 τότε φ=0,3π rad.

Για τη μικρή σφαίρα $I_{cm}=2/5\ m\ r^2$. Να θεωρηθεί ότι το R>>r.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Την στιγμή που η μικρή σφαίρα θα χάσει την επαφή της με την μεγάλη σφαίρα η μοναδική δύναμη που θα ασκείται στην μικρή σφαίρα θα είναι η δύναμη του βάρους που η συνιστώσα προς το κέντρο της μεγάλης σφαίρα θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Αρα $mg\text{συν}\varphi=m.U^2/R$ (1)



Από την ΑΔΕ για τις θέσεις (Α) και (Β) θα πάρουμε

$$m.g.h = 1/2mU^2 + 1/2I\omega^2 \quad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο συνφ=(R-h)/R (3)

Από την (2) και (3) θα βρούμε

$$U=\sqrt{10gR(1-συνφ)/7} \quad (4)$$

Με την βοήθεια της (4) και της (1) θα βρούμε ότι συν φ=10/17

Στη διάρκεια της επαφής των δύο σφαιρών η γωνία που διέγραψε η μικρή σφαίρα πάνω στην μεγάλη θα είναι $θ_1=R.φ/r=17.0{,}3π/0{,}1=51π=160{,}14$rad

Μετά το χάσιμο της επαφής των δύο σφαιρών η μικρή σφαίρα κινείται πλέον μόνο με την επίδραση του βάρους της. Ετσι δεν μπορεί να υπάρξει αλλαγή της γωνιακής ταχύτητας της μικρής σφαίρας μιας και το βάρος ασκείται στο κέντρο της μικρής σφαίρας. Η κίνηση τώρα της μικρής σφαίρα θα είναι επιταχυνόμενη στον άξονα ΨΨ΄, ομαλή στον ΧΧ΄, θα εκτελεί δε και ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω την γωνιακή ταχύτητα που είχε την στιγμή του χάσιμου της επαφής των δύο σφαιρών.

Ετσι στον ΨΨ΄ $2R-h= Uημφt_2 + 1/2gt_2^2$ (5)

Από την (3) H=7m από την (4) U=10m/sec το $ημθ=\sqrt{1-συν2θ}=0{,}8$

Αρα η (5) θα γίνει $5t_2^2+8t_2^2-27=0$ άρα $t_2= 1{,}66$sec

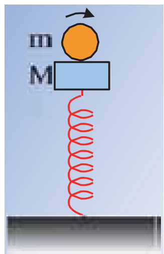
Αρα $θ_2=ω.t_2 =U/r\,.t_2=10/0{,}1\,.1{,}66=166$rad.

Αρα η συνολική γωνιακή μετατόπιση της μικρής σφαίρας μέχρι να φτάσει στο έδαφος θα είναι $θ_{ολ}=160{,}14+166=326{,}14$ rad

Ταλάντωση με σφαίρα που περιστρέφεται

Στο πάνω μέρος κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθερά $K=100N/m$ δένουμε ένα λείο κύβο μάζας $M=1Kg$και το σύστημα ισορροπεί κατακόρυφα. Δίνουμε σε μία λεία σφαίρα μάζας $m=3Kg$ και ακτίνας $R=0,1m$ αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10r/s$ έτσι ώστε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας να είναι παράλληλο με το έδαφος και τη στιγμή $t=0$ αφήνουμε τη σφαίρα πάνω στο σώμα μάζας M έτσι ώστε το κέντρο της σφαίρας να βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφη που περνά από τον άξονα του ελατηρίου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να βρεθούν:



Α. Το είδος της κίνησης της σφαίρας

Β. Η μέγιστη δύναμη που θα ασκεί το ελατήριο στον κύβο στην διάρκεια της κίνησης του συστήματος

Γ. Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος

Δ. Η εξίσωση του μέτρου της ταχύτητας του ανώτερου σημείου της σφαίρας καθώς και των σημείων που βρίσκονται στην επιφάνεια της σφαίρας και απέχουν από το πάνω μέρος του κύβου απόσταση R σε συνάρτηση με το χρόνο.

Για την σφαίρα δίνεται $I_{cm}=0,4mR^2$.

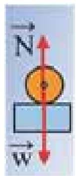
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Επειδή η σφαίρα και ο κύβος έχουν λείες επιφάνειες δεν θα ασκηθεί μεταξύ τους καμία οριζόντια δύναμη. Άρα η σφαίρα θα εκτελεί συνεχώς ομαλή στροφική κίνηση μιας και το $\Sigma\tau=0$ για τη σφαίρα.

Επειδή όμως θα αλλάξει η μάζα του συστήματος στον κατακόρυφο άξονα το σύστημα θα εκτελεί γ.α.τ. Από την αρχική και τελική ισορροπία για τον κατακόρυφο άξονα θα έχουμε:

$Mg=Kx_1$ θα έχουμε $x_1=0{,}1m$ $(M+m)g=Kx_2$ θα έχουμε $x_2=0{,}4m$

Τη στιγμή t=0 που αφήνουμε τη σφαίρα πάνω στο κύβο το σύστημα δεν έχει ταχύτητα στον κατακόρυφο άξονα .Ετσι το σύστημα θα βρίσκεται στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης. Αρα το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος θα είναι $A=x_2-x_1=0{,}3m$.
Για να καθορίσουμε πλήρως την κίνηση του συστήματος θα πρέπει να εξετάσουμε και την περίπτωση αν η σφαίρα θα μπορούσε να χάσει την επαφή της με τον κύβο.
Ετσι με τη βοήθεια του σχήματος και του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα θα έχουμε



$$N-mg=ma \rightarrow N=mg-m\omega^2 x$$

η επαφή δεν θα χάνεται μόνο στην περίπτωση όπου N>0.
Κάνοντας τις πράξεις θα βρούμε ότι για να χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων θα έπρεπε x>0,4m που όμως δεν μπορεί να συμβεί γιατί το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος είναι A=0,3m.
Ετσι τελικά κέντρο μάζας του κύβου εκτελεί γ.α.τ.με πλάτος A=0,3m ενώ η σφαίρα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της σφαίρας εκτελεί και αυτό γ.α.τ. με πλάτος A=0,3m.

B. Η δύναμη του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση $F_{ελ}=K.x_{ελ}$ (1) όπου $x_{ελ}$ η απομάκρυνση από τη ΘΦΜΕ. Το ελατήριο θα συσπειρωθεί μέγιστα όταν το σύστημα φτάσει στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του δηλαδή στην ΘΕΑ. Εκεί το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $x_{ελmax}=x_2+A=0,7m$ και με την βοήθεια της σχέσης (1) $F_{ελmax}=70N$

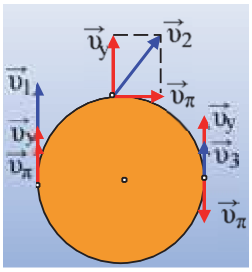
Γ. Το σύστημα εκτελεί μεταφορική αλλά και στροφική κίνηση. Την μέγιστη κινητική ενέργεια το σύστημα θα την έχει όταν η μεταφορική του ενέργεια γίνει μέγιστη μιας και η στροφική του κατάσταση δεν μεταβάλλεται.

$$\text{Αρα } K_{max} = \frac{1}{2}(M+m)\upsilon_{max}^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = 5,1J$$

Δ. Όλα τα σημεία της σφαίρας έχουν ταυτόχρονα δύο ταχύτητες. Μία κατακόρυφη εξαιτίας της ταλάντωσης με εξίσωση

$\upsilon_\psi=\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o)=1,5\sigma\upsilon\nu(5t+\pi/2)$ (SI)

και μία εξαιτίας της περιστροφής της σφαίρας $\upsilon_{περ}=\omega R=1m/s$.

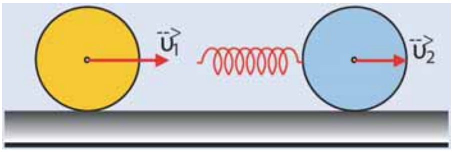


Ετσι τα μέτρα των ταχυτήτων θα δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$\upsilon_1=|1+1,5\sigma\upsilon\nu(5t+\pi/2)|$ $\quad \upsilon_2=\sqrt{1+2,25\sigma\upsilon\nu^2\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)}$ $\quad \upsilon_3=|1,5\sigma\upsilon\nu(5t+\pi/2)-1|$ (S.I.)

Κρούση δύο σφαιρών…μέσω ελατηρίων

Οι σφαίρες του παρακάτω σχήματος μπορούν να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο επίπεδο έχοντας αρχικές ταχύτητες $υ_{ocm1}$=3m/sec και $υ_{ocm2}$=1m/sec .Οι σφαίρες έχουν την ίδια ακτίνα R=0,2m και την ίδια μάζα m=1Kg.



Η κάθε σφαίρα έχει περασμένη συμμετρικά από το κέντρο της μία οριζόντια αβαρή και άκαμπτη βελόνα μήκους 3R. Στα άκρα της βελόνας που είναι περασμένη στη δεύτερη σφαίρα είναι κολλημένα δύο οριζόντια ελατήρια φυσικού μήκους L_o=0,5m και σταθεράς K=140N/m το καθένα.

A. Να αποδείξετε ότι οι σφαίρες μόλις θα έρθουν σε επαφή.
B. Το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της κάθε σφαίρας
Γ. Τα μέτρα των τελικών ταχυτήτων των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών.

Δίνεται $I_{cm}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Επειδή η δεύτερη σφαίρα έχει μικρότερη ταχύτητα από την πρώτη κάποια στιγμή τα δύο ελατήρια θα έρθουν σε επαφή με την οριζόντια βελόνα της πρώτης σφαίρας. Έτσι η πρώτη σφαίρα θα αρχίσει να κάνει επιβραδυνόμενη στροφική και μεταφορική κίνηση εξαιτίας της δύναμης των ελατηρίων και της στατική τριβής. Οι αντίστοιχες δυνάμεις των ελατηρίων και της στατικής τριβής αναγκάζουν την πρώτη σφαίρα να κάνει επιταχυνόμενη μεταφορική και στροφική κίνηση. Η απόσταση των δύο σφαιρών θα γίνει ελάχιστη όταν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών γίνουν ίσες. Με τη βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε $M\upsilon_{cm1}+M\upsilon_{cm2}=(M+M)\upsilon_{κοιν}$ άρα $\upsilon_{κοιν}=2m/sec$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σύστημα των δύο σφαιρών θα έχουμε

$$1/2M\upsilon_{cm1}^2+1/2\ 0{,}4MR^2\ \omega_1^2+1/2M\upsilon_{cm2}^2+1/2\ 0{,}4MR^2\ \omega_2^2=$$
$$2\cdot 1/2\ M\upsilon_{cmκοιν}^2+2\cdot 1/2\ \ 0{,}4MR^2\ \omega_{κοιν}^2+½\ 2Kx_{max}^2$$

θα βρούμε μετά από πράξεις $x_{max}=0{,}1m$.

Έτσι η απόσταση των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών θα είναι

$$d=L_o-x_{max}=0{,}4m=2R$$

άρα μόλις που οι δύο σφαίρες θα έρθουν σε επαφή.

Β. Για την κάθε σφαίρα ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα για την μεταφορική και στροφική κίνηση

$$2F_{ελ}-T=Ma_{cm}\ (1)\ \text{και}\ T\cdot R=0{,}4MR^2\cdot \alpha_{γων}\ (2)$$
$$2Kx-0{,}4Ma_{cm}=Ma_{cm}\ \text{άρα}\ a_{cm}=2Kx/1{,}4=200x\ (SI)$$

Με την βοήθεια της σχέσης (2) $T=80x$ (SI)

Το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της κάθε σφαίρας θα είναι $\Delta L/\Delta t=T_{max}\cdot R=80\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2=1{,}6N\cdot m$

Γ. Με την βοήθεια της ΑΔΟ και της ΑΔΕ για το αρχικό και το τελικό σύστημα σωμάτων θα έχουμε

$$M\upsilon_{ocm1}+M\upsilon_{ocm2}= M\upsilon_{ocm1}{}' +M\upsilon_{cm2}{}' \ (3)$$

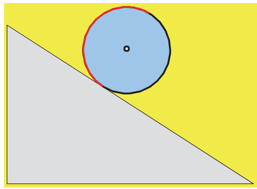
$$1/2M\upsilon_{cm1}{}^2+1/2\ 0{,}4MR^2\omega_1{}^2+1/2M\upsilon_{cm2}{}^2+1/2\ 0{,}4MR^2\omega_2{}^2 =$$

$$1/2M\upsilon_{cm1}{}^2+1/2\ 0{,}4MR^2\omega_{'1}{}^2+1/2M\upsilon_{cm2}{}^2 \quad +1/2\ 0{,}4MR^2\omega_2{}^2 \ (4)$$

Με την βοήθεια των σχέσεων (3) και (4) θα βρούμε ότι οι δύο σφαίρες τελικά θα ανταλλάξουν ταχύτητες

$$U_{cm1'}=1m/sec \text{ και } U_{cm2'} =3m/sec$$

Μια σφαίρα με λιπαντικό



Μία σφαίρα με μάζα M=1Kg και ακτίνας R=2,5/π m την ρίχνουμε μέσα σε μία λιπαντική ουσία μέχρι η μισή ακριβώς να λιπανθεί ενώ η υπόλοιπη να μείνει χωρίς λιπαντική ουσία. Το στρώμα της λιπαντικής ουσίας είναι λεπτότατο και δεν μπορεί να μετακινηθεί. Ανεβάζουμε τη σφαίρα πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο μεγάλου μήκους με γωνίας κλίσης φ με ημφ=0,7 και με το χαμηλότερο σημείο της σφαίρας να είναι σε επαφή με τη διαχωριστική επιφάνεια της σφαίρας που έχει το λιπαντικό. Αφήνουμε τη σφαίρα ελεύθερη και αρχικά η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Μόλις η σφαίρα εκτελέσει μισή περιστροφή έρχεται σε επαφή η λιπαντική ουσία με το κεκλιμένο επίπεδο. Η λιπαντική ουσία επιτρέπει την σφαίρα να κινείται χωρίς τριβές όταν φυσικά είναι σε επαφή εκείνο το κομμάτι της σφαίρας που έχει το λιπαντικό. Όταν η σφαίρα θα έχει διαγράψει μία πλήρη περιστροφή να βρεθούν:

Α. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας .

Β. Η ταχύτητα του πιο απομακρυσμένου σημείου της σφαίρας από το κεκλιμένο επίπεδο καθώς και του σημείου που βρίσκεται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο.

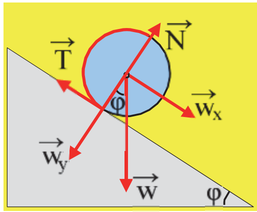
Γ. Η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας.

Δ. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο μέχρι η σφαίρα να εκτελέσει μία πλήρη περιστροφή.

Για τη σφαίρα δίνεται $I_{cm}=0,4MR^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την κύλιση χωρίς ολίσθηση της σφαίρας θα ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα για την μεταφορική και την περιστροφική



$Mg\eta\mu\varphi - T = Ma_{cm}$ (1) $TR = 0{,}4MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Μετά τις πράξεις η επιτάχυνση του κέντρου μάζας της σφαίρα θα βρεθεί $a_{cm}=5m/sec^2$. Από το νόμο του διαστήματος για την αρχικά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$S=1/2\ a_{cm}\ t^2$ και με $S=2\pi R/2$ θα βρούμε t=1sec.

Ετσι με την βοήθεια του νόμου της ταχύτητας στην επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση θα βρούμε:

$\upsilon_{cm}=a_{cm}.t=5m/s$ και $\omega=\upsilon_{cm}/R=2\pi$ r/s.

Εκείνη την στιγμή έρχεται σε επαφή η λιπαντική ουσία με το κεκλιμένο επίπεδο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην υπάρχει πλέον τριβή. Η κίνηση πλέον της σφαίρας είναι επιταχυνόμενη μεταφορική αλλά ομαλά στροφική μιας και δεν υπάρχει πλέον δύναμη που να μπορεί να προκαλέσει ροπή.
Από το νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$Mg\eta\mu\varphi=Ma_{cm2}$ άρα $a_{cm2}=7m/sec^2$.

Η σφαίρα θα περιστραφεί κατά μισή στροφή ακόμη μετά από χρόνο $t'=\theta/\omega=0{,}5sec$.

Από το νόμο της ταχύτητας για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$$υ_{cmτελ}=υ_{cm}+a_{cm2}.t'=8,5m/sec.$$

Β. Όλα τα σημεία της σφαίρας θα έχουν ταχύτητα που θα προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας και της γραμμικής ταχύτητας λόγω περιστροφής της σφαίρας. Ετσι το ανώτερο σημείο θα έχει

$$υ=υ_{cmτελ}+ωR=13,5m/sec$$

Ενώ το σημείο επαφής με το κεκλιμένο επίπεδο θα έχει

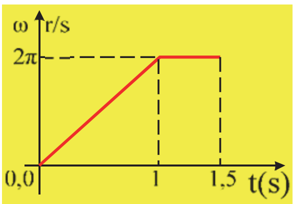
$$υ=υ_{cmτελ}-ωR=3,5m/sec$$

Γ. Το συνολικό διάστημα που μετακινήθηκε το κέντρο μάζας ήταν

$$S=2πR/2 + υt'+1/2\ a_{cm2}.t'^2=5,875m.$$

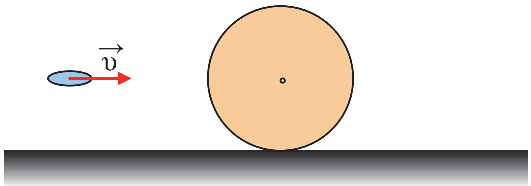
Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την μετακίνηση της σφαίρας θα έχουμε $MgH=K_{ολ}$ θα βρούμε $K_{ολ}=41,125J$

Δ. Αρχικά η περιστροφική κίνηση της σφαίρας ήταν στροφικά επιταχυνόμενη με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέχρι να φτάσει το σημείο της σφαίρας που περιέχει το λιπαντικό και η στροφική κίνηση της σφαίρας να γίνει ομαλή. Ετσι η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας θα είναι



Να ανοίξουμε μια τρύπα σε σφαίρα

Η ξύλινη σφαίρα του παρακάτω σχήματος έχει μάζα M=1,5Kg και ακτίνα R=0,12 m και ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή μ=0,2. Ειδικό βλήμα μάζας m=0,5Kg κινείται οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ=272m/s και σε απόσταση R από το οριζόντιο έδαφος.



Το βλήμα μόλις καταφέρνει και διαπερνάει την ξύλινη σφαίρα και εξέρχεται από αυτή συμπαρασύροντας όλη τη μάζα της σφαίρας που συναντά μπροστά της σε αμελητέο χρόνο. Αν μάζα της σφαίρας μετά την κρούση είναι M΄=1,2Kg και η μάζα της σφαίρας που πήρε το βλήμα δημιούργησε μία οριζόντια οπή σε μορφή λεπτής ράβδου κατά μήκος μιας οριζόντιας διαμέτρου της σφαίρας να βρεθούν:

Α. Η ροπή αδράνειας της ξύλινης σφαίρας μετά την κρούση

Β. Ποια χρονική στιγμή μετά την κρούση η κούφια σφαίρα θα αρχίσει να κυλίεται

Γ. Πόση ενέργεια «χάθηκε» σε όλο το παραπάνω φαινόμενο.

Δίνεται για την σφαίρα $I_{cm}=0,4M{\cdot}R^2$ και για λεπτή ράβδο $I_{cm}=1/12{\cdot}ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η ροπή αδράνειας της κούφιας σφαίρας είναι αν από την αρχική της ροπή αδράνειας αφαιρέσουμε την ροπή αδράνειας της μάζας που αφαιρέθηκε. Αρα

$$I_{κουφιας}=0,4,M.R^2-1/12.(M-M΄).(2R)^2=0,0072Kg.m^2.$$

Β. Με την βοήθεια της ΑΔΟ για την κρούση που διαρκεί ελάχιστα θα έχουμε

$$m.U= M΄.U_{cm} + (m+M-M΄).U_{βλ} \quad (1)$$

Επειδή το βλήμα μόλις και καταφέρνει να διαπεράσει τη σφαίρα θα πρέπει $U_{cm}=U_{βλ}$ (2)

Από την (1) και (2) μετά τις πράξεις θα βρούμε U_{cm}=68m/sec

Το κατώτερο σημείο της κούφιας σφαίρας μετά την κρούση θα έχει ταχύτητα $U_{κατ}$=68m/sec. Ετσι θα αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης με φορά προς τα πίσω και για τις κινήσεις της σφαίρας θα ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα

$$T=M΄.a_{cm} \text{ άρα } a_{cm}=2m/sec^2 \text{ και}$$

$$T.R=I_{κουφιας}.α_{γων} \quad \text{άρα } α_{γων}=40\ r/sec^2$$

Η καθαρή κύλιση της σφαίρας θα αρχίσει όταν $U_{μετ}=U_{περ}$ άρα

$$U_{cm}-a_{cm}.t=α_{γων}.t.R \text{ άρα } t=10\ sec$$

Γ. Μόλις αρχίσει η καθαρή κύλιση παύει να υπάρχει πλέον η τριβή ολίσθησης και η σφαίρα συνεχίζει την ομαλή στροφική και μεταφορική της κίνηση. Ετσι με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική κατάσταση στην τελική κατάσταση θα έχουμε

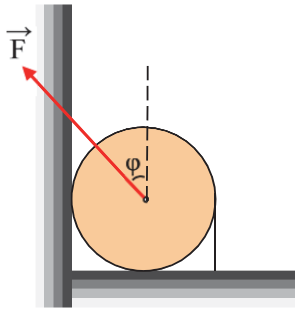
$$½.m.U^2=1/2.I_{κουφιας}.ω_{τελ}^2+1/2.M΄.U_{τελ}^2+½.(m+M-M΄).U_{cm}^2 +E_{χαθ}$$

$U_{τελ}=U_{cm}-a_{cm}.t=48m/sec$ και $ω_{τελ}=48/0,12=400$ r/sec

άρα μετά από πράξεις $E_{χαθ}=14688J$

Κίνηση σφαίρας σε κατακόρυφο τοίχο

Σφαίρα μάζας M=5Kg και ακτίνας R=0,1m ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο έχοντας τυλιγμένο λεπτότατο αβαρές νήμα που βρίσκεται μέσα σε ένα κατακόρυφο λεπτότατο αυλάκι που είναι χαραγμένο στην επιφάνεια της σφαίρας. Η σφαίρα είναι επίσης σε επαφή με κατακόρυφο τοίχο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής μ=0,18.



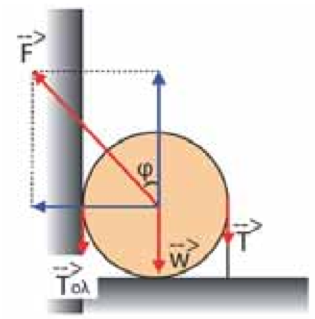
Ασκούμε την στιγμή t=0 στο κέντρο της σφαίρας σταθερή δύναμη F=100√2N που σχηματίζει γωνία $φ=45^o$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με αποτέλεσμα η σφαίρα να αρχίσει να ανεβαίνει κυλιόμενη και το σχοινί που είναι συνεχώς τεντωμένο να ξετυλίγεται κατακόρυφα.
Τη χρονική στιγμή t_1=0,65sec κόβουμε το νήμα. Να βρεθούν:

Α. Πόση η ανύψωση του κέντρου μάζας της σφαίρας την στιγμή που κόπηκε το νήμα και πόση η κινητικής ενέργεια της σφαίρας εκείνη τη στιγμή.
Β. Ποια στιγμή θα αρχίσει η κύλιση στον κατακόρυφο τοίχο.
Γ. Πόση θερμότητα θα παραχθεί συνολικά .

$I_{cm}=0,4M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Απο τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και στροφική κίνηση της σφαίρας θα έχουμε



$$F\sigma\upsilon\nu\varphi - M.g - T - T_{o\lambda} = M.a \quad (1)$$

$$T.R - T_{o\lambda}.R = 0{,}4.M.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Επειδή το σημείο επαφής με τον κατακόρυφο τοίχο έχει συνεχώς (πριν κοπεί το νήμα) ταχύτητα 2 U_{cm} θα δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης:

$$T_{o\lambda} = \mu.N = \mu.F\eta\mu\varphi = 18N \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) ,(2) και (3) θα βρούμε μετά από πράξεις $a=2m/sec^2$. Από τον νόμο του διαστήματος για την επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση :

$$\Delta H_1 = 1/2.a.t^2 = 0{,}4225m$$

Από το νόμο της ταχύτητας για την επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση:

$$U_{ocm} = a.t_1 = 1{,}3m/sec.$$

Άρα $K_{ολ}=1/2M.U_{cm}^2 +1/2.I.ω^2=6,3375J$

B. Τη στιγμή που κόβεται το νήμα η ταχύτητα του σημείου επαφής της σφαίρας με τον τοίχο είναι 2,6m/sec με φορά προς τα πάνω. Έτσι τώρα η σφαίρα αρχίζει να ολισθαίνει ανεβαίνοντας προς τα πάνω. Η καθαρή κύλιση θα ξεκινήσει όταν το σημείο επαφής της σφαίρας με τον τοίχο αποκτήσει συνολική ταχύτητα 0.

Από του νόμους τώρα της κίνησης για την περιστροφική και μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$$Fσυνφ-M.g-T_{ολ}=M.a_2 \quad (4)$$

$$T_{ολ}.R=0,4.M.R^2.α_{γων2} \quad (5)$$

μετά από πράξεις $a_2=6,4m/sec^2$ και $α_{γων2}=90r/sec^2$.

Θα πρέπει $U_{μετ}=U_{περ}$ άρα $U_o+a_2.t_2=(-ω_0+α_{γων2}.t_2).R$ άρα $t_2=1sec$.

Η καθαρή κύλιση θα αρχίσει 1sec μετά το κόψιμο του νήματος.

Πρέπει όμως να δούμε αν ισχύει και η συνθήκη κύλισης της σφαίρας δηλαδή $T_{στ}<μ.N$. Από του νόμους τώρα της κίνησης για την περιστροφική και μεταφορική κίνηση αν υπήρχε κύλιση θα έχουμε

$$Fσυνφ-M.g-T_{στ}=M.a_3 \quad (6) \qquad T_{στ}.R=0,4.M.R^2.α_{γων3} \quad (7)$$

θα προκύψει $a_3=50/7m/sec^2$ και $T_{στ}=100/7N$ που είναι μικρότερη από την $T_{ολ}=18N$.

Ετσι η σφαίρα θα κυλίεται ανερχόμενη στον κατακόρυφο τοίχο.

Τελικά τη χρονική στιγμή $t_3=t_1+t_2=1,65sec$ θα αρχίσει η καθαρή κύλιση.

Γ. Θερμότητα θα αναπτύσσεται μέχρι την στιγμή που θα αρχίσει η καθαρή κύλιση δηλαδή μέχρι την χρονική στιγμή t_3. Ετσι με την βοήθεια της ΑΔΕ από την στιγμή 0 μέχρι την t_3 θα έχουμε

$$WF=K_{\pi}+K_{\mu\varepsilon\tau}+UW+Q \quad (8)$$

Από τον νόμο του διαστήματος για την επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση :

$$\Delta H_2=U_o.t_2+1/2.a_2.t^2=4{,}5m$$

Από το νόμο της ταχύτητας για την επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση:

$$U_{2cm}=U_o+a_2.t_2=7{,}7m/sec$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (8):

$$F.(\Delta H_1+\Delta H_2).\sigma\upsilon\nu\varphi=1/2.M.U_{cm}^2+1/2.I.\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2+Q$$

Μετά από πράξεις Q=23,7875J

Μια σφαίρα και δύο τεταρτοκύκλια

Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από δύο κατακόρυφα τεταρτοκύκλια με ακτίνες R_1=2m και R_2= 0,25 m που συνδέονται μεταξύ τους με οριζόντιο τμήμα μήκους L= 2πm. Από την κορυφή του πρώτου τεταρτοκύκλιου αφήνουμε σφαίρα μάζας m και ακτίνας r=0,1 m. Η σφαίρα σε όλη την διάρκεια της αρχικής της κίνησης και ενώ βρίσκεται σε επαφή με τα τεταρτοκύκλια ή το οριζόντιο επίπεδο κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Να βρεθούν:

Α. Το μέγιστο ύψος του κέντρου μάζας της σφαίρας από το οριζόντιο επίπεδο μετά το χάσιμο της επαφής με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο.

Β. Ο αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει η σφαίρα από την αρχική θέση μέχρι να επιστέψει στο άνω άκρο του δεύτερου τετατροκυκλίου για πρώτη φορά.

Γ. Αν η σφαίρα επιστρέψει ποτέ στην αρχική της θέση.

Δίνεται για την σφαίρα I_{cm}=0,4M.r^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση και μέχρι την θέση που η σφαίρα χάνει την επαφή της με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο

$m.g.R_1=m.g.R_2+1/2m.U^2+½.0,4.m.r^2.\omega^2$ θα βρούμε μετά από τις πράξεις U=5m/s.

Το βάρος είναι η μοναδική δύναμη που δέχεται η σφαίρα μετά το χάσιμο της επαφής της σφαίρας με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο. Ετσι θα εκτελέσει επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση μέχρι το ανώτερο σημείο της τροχιάς και μετά ελεύθερη πτώση ενώ ταυτόχρονα θα εκτελεί και ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα που θα βρεθεί από την σχέση $U=\omega.r$ $\omega=50r/s$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την στιγμή που χάνεται η επαφή και μέχρι το ανώτερο σημείο θα έχουμε

$$m.g.R_2+1/2.m.U^2+½.I.\omega^2=m.g.Hmax+½.I.\omega^2$$

άρα μετά από πράξεις Hmax=1,5m

Β. Για κάθε περιστροφή που εκτελεί ενώ βρίσκεται σε επαφή με τα τεταρτοκύκλια και το οριζόντιο έδαφος διανύει διάστημα $S_1=2\pi r=0,2\pi m$.Το συνολικό μήκος της διαδρομής μέχρι να χαθεί η επαφή για πρώτη φορά θα είναι $S_{ολ}=2\pi R_1/4+2\pi R_2/4+L=3,125\pi m$

Ετσι $N_1=3,125\pi/2\pi.0,1=15,625$ περιστροφές.

Μετά το χάσιμο της επαφής από το νόμο της ταχύτητας για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε $U_{τελ}=U-g.t_{αν}$άρα $t_{αν}=0,5s$.

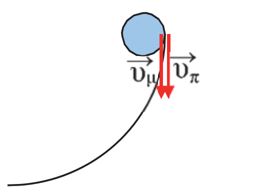
Ο χρόνος καθόδου θα είναι και πάλι 0,5s άρα η σφαίρα θα βρίσκεται στον αέρα για συνολικό χρόνο $t_{ολ}=1s$.

Η γωνιακή μετατόπιση της σφαίρας για το χρόνο που βρίσκεται στο αέρα θα βρεθεί από την σχέση $\theta=\omega.t=50.1=50rad$.

Οι περιστροφές της σφαίρας στον αέρα θα είναι $N_2=\theta/2\pi=25/\pi$

περιστροφές. Μέχρι λοιπόν η σφαίρα να επιστέψει στο τεταρτοκύκλιο για πρώτη φορά θα έχει εκτελέσει συνολικά $N_{ολ}$={15,625+25/π} ≈23,59 περιστροφές.

Γ. Την στιγμή που η σφαίρα επιστέφει στο τεταρτοκύκλιο το σημείο επαφής της σφαίρας με το τεταρτοκύκλιο θα έχει ταχύτητα μεταφοράς με φορά προς τα κάτω και γραμμική ταχύτητα περιστροφής με φορά πάλι προς τα κάτω άρα συνολικό μέτρο ταχύτητας

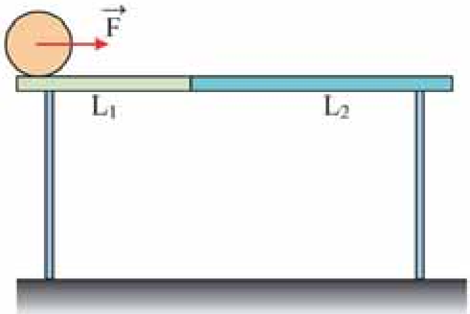


$U_{ολ}=U_{περ}+U_{μετ}$=5+5=10m/s.

Αρα στην σφαίρα θα αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης την στιγμή της επαφής της με το τεταρτοκύκλιο. Ετσι λόγω της τριβής ολίσθησης θα χαθεί ενέργεια με αποτέλεσμα η σφαίρα να μη φτάσει ποτέ ξανά στην αρχική της θέση.

Μια σφαίρα κατά μήκος δύο ράβδων με και χωρίς τριβές

Στο παρακάτω σχήμα η οριζόντια λεπτή και ομογενής ράβδος έχει μάζα



M_1=2Kg, μήκος L=4,4m και ισορροπεί με την βοήθεια δύο κατακόρυφων υποστηριγμάτων ύψους H=1,8m. Η ράβδος αποτελείται από δύο άνισα τμήμα- τα μήκους L_1=1m και L_2. Στο πρώτο τμήμα της ράβδου υπάρχουν τριβές ενώ το δεύτερο τμήμα της ράβδου είναι τελείως λείο. Μία σφαίρα μάζας M=1kg και ακτίνας R=0,2m βρίσκεται ακίνητη στην μία άκρη της ράβδου στην περιοχή που παρουσιάζει τριβές και δέχεται στο κέντρο της σταθερή οριζόντια δύναμη F=2,8N με αποτέλεσμα η σφαίρα να αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στην ράβδο. Την στιγμή που η σφαίρα χάνει την επαφή της με τη ράβδο η δύναμη F καταργείται.

Να βρεθούν:

Α. Πόση η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας όταν φτάνει στο έδαφος;

Β. Πόσος είναι ο συνολικός χρόνος κίνησης της σφαίρας μέχρι να φτάσει η σφαίρα στο έδαφος;

Γ. Πόσες περιστροφές διάγραψε η σφαίρα μέχρι να φτάσει στο έδαφος;

Δ. Να βρεθούν οι εξισώσεις των δυνάμεων που ασκούνται στα άκρα της ράβδου από τα υποστηρίγματα σε συνάρτηση με τον χρόνο μέχρι να φτάσει η σφαίρα στο έδαφος.

Για την σφαίρα $I=0{,}4MR^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με εφαρμογή της ΑΔΕ από την αρχική θέση μέχρι την τελική θέση θα έχουμε:

$$W_F+U_W=K_{ολ} \quad \text{άρα } 2{,}8.4{,}4+1.10.1{,}8=K_{ολ}$$

$$\text{άρα } K_{ολ}=30{,}32J$$

Β. Η κίνηση στην περιοχή της ράβδου όπου υπάρχει τριβή είναι επιταχυνόμενη στροφική και επιταχυνόμενη μεταφορική. Ετσι με την βοήθεια των νόμων της κίνησης θα πάρουμε

$$F\text{-}T=M.a \quad (1) \quad T.R=0{,}4.M.R^2.α_{γων} \text{ άρα } T=0{,}4M.a \ (2)$$

από (1) και (2) θα βρεθεί

$$a=2m/sec^2$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα δίνεται από την σχέση:

$$U_{cm}=a.t \ (3)$$

και ο χρόνος θα βρεθεί από την σχέση

$$L_1=1/2\,.a.t_1^2$$

$$\text{άρα } t_1=1sec$$

και από την (3) θα βρούμε

$$U_{cm}=2m/sec.$$

Την στιγμή που η σφαίρα θα βρεθεί στο περιοχή της ράβδου όπου δεν υπάρχουν τριβές η σφαίρα θα κάνει επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση λόγω της δύναμης F αλλά η τριβή πλέον δεν υπάρχει άρα η στροφική κίνηση της σφαίρας μετατρέπεται σε ομαλή στροφική. Η μεταφορική πλέον κίνηση αποκτά επιτάχυνση $a_2=F/M=2{,}8m/sec^2$. Ο χρόνος κίνησης στην περιοχή της ράβδου όπου δεν υπάρχουν τριβές θα δίνεται από την σχέση:

$$L-L_1=U_{cm}.t_2+1/2.a_2.t^2$$

άρα θα καταλήξουμε στην δευτεροβάθμια:

$$1{,}4.t_2^2+2t_2-3{,}4=0$$

θα βρούμε $t_2=1sec$.

Από τον νόμο της ελεύθερη πτώσης θα βρούμε

$$H=1/2.g.t_3^2 \text{ άρα } t_3=0{,}6sec.$$

Αρα ο συνολικός χρόνος κίνησης της σφαίρας θα είναι $t_{ολ}=2{,}6sec$.

Γ. Η γωνία στροφής της σφαίρας κατά την διάρκεια της επιταχυνόμενης στροφικά κίνησης θα δίνεται από την σχέση:

$$θ_1=1/2.α_{γων}.t_1^2=5rad$$

Η γωνιακή ταχύτητα την στιγμή που μπαίνει η σφαίρα στο λείο μέρος της ράβδου θα δίνεται από την σχέση:

$$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}.t_1=10rad/sec.$$

Στη συνέχεια και μέχρι να φτάσει η σφαίρα στο έδαφος δεν υπάρχει δύναμη που να προκαλεί ροπή στην σφαίρα άρα η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας παραμένει σταθερή και ίση με $\omega=10rad/sec$ άρα $\theta_2=\omega(t_2+t_3)=16rad$

άρα η συνολική γωνία διαγραφής θα είναι $\Theta_{ολ}=21rad$ άρα ο αριθμός των περιστροφών θα είναι

$$N=\Theta_{ολ}/2\pi=10,5/\pi \text{ περιστροφές.}$$

Δ. Για την ισορροπία του συστήματος ράβδου-σφαίρας θα έχουμε στον κατακόρυφο άξονα

$$N_1+N_2=(M_1+M).g \quad (3)$$

Για την ισορροπία του συστήματος με την βοήθεια της σχέσης $\Sigma\tau_{AKPO}=0$ και ενώ η σφαίρα βρίσκεται στην περιοχή της που έχει με τριβές θα έχουμε

$$-M.g.x_1-M_1.g.L/2+N_2.L=0 \quad (4)$$

$$\text{άρα } N_2=10+25.t^2/11 \quad 0\le t\le 1sec$$

$$N_1=20-25.t^2/11 \quad 0\le t\le 1sec$$

Η σχέση (4) θα γραφεί για την περιοχή όπου δεν υπάρχουν τριβές:

$$-M.g.x_2-M_1.g.L/2+N_2.L=0$$

$$άρα\ -10\{1+2(t-1)+1,4(t-1)^2\}-44+N_2.4,4=0\ άρα$$

$$N_2=10+10\{1+2(t-1)+1,4(t-1)^2\}/4,4 \quad 1\leq t<2sec$$

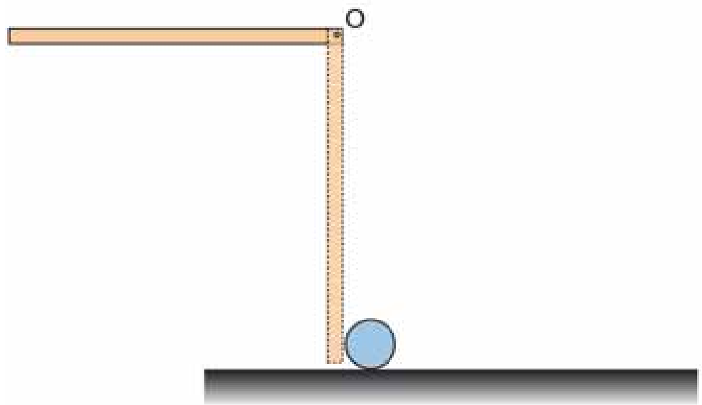
$$N_1=20-10\{1+2(t-1)+1,4(t-1)^2\}/4,4 \quad 1\leq t<2sec$$

Όταν το η σφαίρα είναι στον αέρα οι δυνάμεις θα είναι ίσες και θα δίνονται από την σχέση

$$N_1=N_2=15N \quad 2<t\leq 2,6sec$$

Κρούση ράβδου και ολίσθηση σφαίρας

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος έχει μάζα M_1=3kg και μήκος L=1,2m αφήνεται από οριζόντια θέση και συγκρούεται αφού διαγράψει γωνία 90° με ακίνητη σφαίρα μάζας M_2=5Kg και ακτίνας R=0,1m. Το καρφί όπου είναι στερεωμένο το ένα άκρο της ράβδου απέχει απόσταση H=1,3m από το οριζόντιο έδαφος όπου ισορροπεί η σφαίρα.



Μετά την κρούση της ράβδου με την σφαίρα η ράβδος σταματάει. Η σφαίρα αρχικά αρχίζει να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να αρχίσει η καθαρή κύλιση. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σφαίρας και δαπέδου είναι μ=0,2. Να βρεθούν:

Α. Ο χρόνος που θα χρειασθεί μέχρι να αρχίσει η καθαρή κύλιση για τη σφαίρα. Ποια η τελική ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας;

Β. Η τελική κινητική ενέργεια της σφαίρας

Γ. Η απώλεια ενέργειας στην διάρκεια του παραπάνω φαινόμενου.

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας δίνεται από την σχέση $I_2=0,4.M_2.R^2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από τον άξονα περιστροφής της $I_1=1/3.M_1.L^2$.

Η σφαίρα να θεωρηθεί σημειακή την στιγμή της κρούσης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

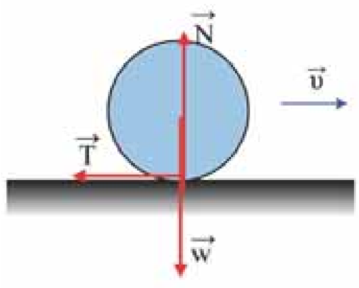
Α. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κίνηση της ράβδου

$$M_1.g.L/2 = 1/2.I_1.\omega_1^2 \quad \text{άρα } \omega_1=5r/s$$

Για την κρούση της ράβδου με την σφαίρα που θα τη θεωρήσουμε σημειακή μάζα θα έχουμε από την ΑΔΣ

$$I_1.\omega_1=M_2.\upsilon.L \quad \text{άρα } \upsilon=1{,}2m/sec.$$

Έτσι η σφαίρα αρχίζει στιγμιαία να εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση αφού το στιγμιαίο κτύπημα από την ράβδο έγινε στο κέντρο της σφαίρας. Έτσι θα αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης η οποία θα επιβραδύνει την μεταφορική κίνηση και θα προκαλεί ροπή για να επιταχύνει την στροφική κίνηση μέχρι να αρχίσει η καθαρή κύλιση.



Από τους νόμους της κίνησης θα έχουμε για την μεταφορική

T=M2.a άρα μ.M2.g=M2.a άρα a=2m/sec2.

Για την στροφική κίνηση

$$T.R=0,4.M_2.R^2.\alpha\gamma\omega\nu$$

$$\text{άρα } \mu.M_2.g.R=0,4.M_2.R^2.\alpha\gamma\omega\nu \text{ άρα}$$

$$\alpha\gamma\omega\nu=50r/sec^2.$$

Η καθαρή κύλιση θα ξεκινήσει όταν η ταχύτητα του κατώτερου σημείου της σφαίρας γίνει ίση με το 0. ΄Αρα $U_{\mu\varepsilon\tau}=U_{\pi\varepsilon\rho}$ άρα U-at=αγων.t.R ο χρόνος θα βρεθεί t=6/35 s και $\upsilon_{\mu\varepsilon\tau}$=6/7 m/sec.

B. Οταν αρχίσει η καθαρή κύλιση το σημείο επαφής της σφαίρας με το δάπεδο έχει συνολική ταχύτητα 0. Αρα δεν θα υπάρχει τριβή άρα η σφαίρα θα εκτελεί ομαλή στροφική και μεταφορική κίνηση. Η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας θα είναι:

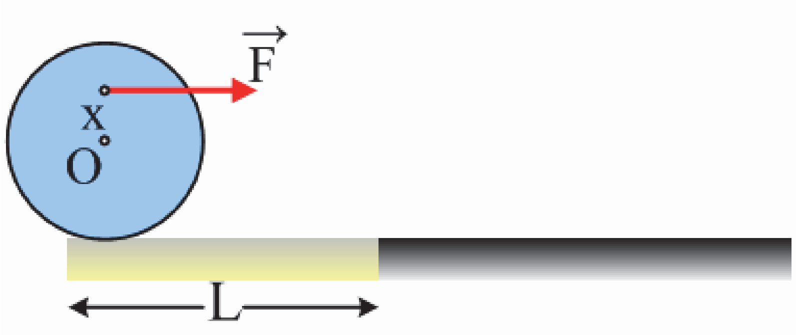
$$K\text{ολ}=K\text{στρ}+K\mu\varepsilon\tau=1/2.M_2.U_{\mu\varepsilon\tau}^{\ 2}+1/2.I_2.\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^{\ 2}=18/7J$$

Γ. Ενέργεια έχει χαθεί στην διάρκεια της κρούσης αλλά και μέχρι να αρχίσει η καθαρή κύλιση της σφαίρας. Με εφαρμογή της ΑΔΕ από την αρχική μέχρι και την τελική κατάσταση του συστήματος των σωμάτων θα έχουμε

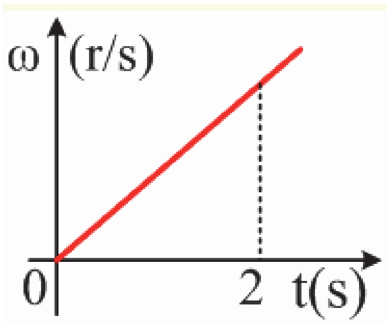
$$U_{W\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon}=K_{o\lambda\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}+\Delta E \qquad \text{άρα } \Delta E=108/7\ J$$

Μια σφαίρα σε ένα λείο και ένα μη λείο επίπεδο.

Στο παρακάτω σχήμα η σφαίρα έχει μάζα M=4Kg ακτίνα R=0,4m και ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο μήκους L=0,2m.Στην συνέχεια ακολουθεί οριζόντιο μη λείο επίπεδο μεγάλου μήκους.



Ασκούμε την χρονική στιγμή t=0 στην σφαίρα σταθερή οριζόντια δύναμη F=1,6N έτσι ώστε ο φορέας της δύναμης να απέχει απόσταση x πάνω από το κέντρο της σφαίρας. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την γραφική παράσταση.



Να βρεθούν:

A. Η απόσταση x

Β. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας την στιγμή t_1=1sec .

Γ. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας την στιγμή t_3=10sec αν όταν η σφαίρα έχει διανύσει διάστημα 5m η δύναμη F είχε καταργηθεί.

Δίνεται για την σφαίρα $I_{cm}=0,4M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Επειδή το πρώτο επίπεδο είναι λείο για την μεταφορική κίνηση θα ισχύει

$$F=M.a \quad \text{άρα} \quad a=0,4m/sec^2.$$

Από τον νόμο του διαστήματος στην επιταχυνόμενη κίνηση θα έχουμε $L=1/2.a.t^2$ άρα t=1sec. Δηλαδή την στιγμή t=1sec η σφαίρα μπαίνει στο μη λείο επίπεδο. Από το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας με το χρόνο δεν παρατηρούμε καμία αλλαγή στην κλίση της ευθείας μετά την στιγμή t=1sec. Δηλαδή δεν υπάρχει αλλαγή στην γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας. Αρα δεν άλλαξε η συνισταμένη των ροπών. Αρα δεν αναπτύχθηκε τριβή. Για να μην υπάρχει τριβή σημαίνει ότι το σημείο επαφής της σφαίρας με το δάπεδο είχε συνολική ταχύτητα 0. Αρα η σφαίρα έως εκείνη την στιγμή κυλιόταν χωρίς να ολισθαίνει. Για την στροφική κίνηση στο λείο επίπεδο

Στ=Ι.αγων άρα $F.x=0,4.M.R^2$.αγων (1) .

Η σφαίρα κυλίεται άρα a=αγων.R άρα αγων=1r/sec^2.

Από (1) $x=0,16m$.

Β. Ο ρυθμός με ταβολής της ολικής κινητικής ενέργειας θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta K/\Delta t=\Sigma F.U+\Sigma\tau.\omega=F.a.t_1+F.x.\alpha\gamma\omega\nu.t_1=0,896J/s.$$

Γ. Από τον νόμο του διαστήματος $S=1/2.a.t^2_3$ άρα $t_3=5sec$.

Με τον νόμο της ταχύτητας $U=a.t_3=2m/sec$.

Θα μπορούσαμε να βρούμε την ταχύτητα με την βοήθεια της ΑΔΕ για την μετατόπιση 5m θα είχαμε

$$W_{f\mu\varepsilon\tau} + W_{\tau F}=K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} \quad (1) \text{ και } W_{f\mu\varepsilon\tau} /W_{\tau F}={}_{1/2}.M.U^2/{}_{1/2}.I.\omega^2=2,5$$

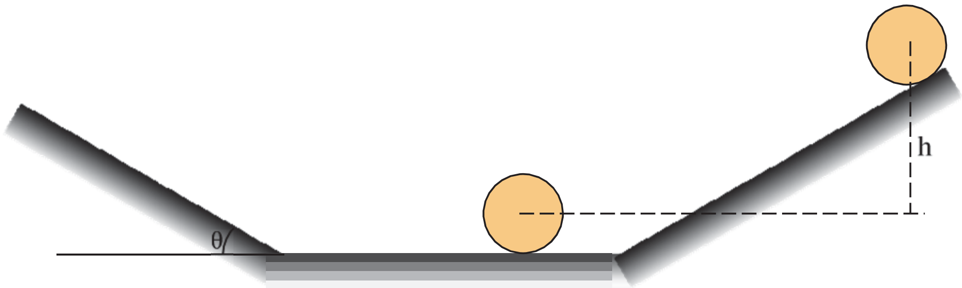
$$\text{άρα } W_{\tau f}=F.S/2,5=3,2J$$

Από την (1) $8+3,2= ½.4.U^2 + ½.0,4.4.U^2$ άρα $U=2m/sec$.

Η ταχύτητα αυτή του κέντρου μάζας είναι στην θέση όπου καταργείται η δύναμη. Μετά την κατάργηση της δύναμης η σφαίρα εκτελεί ομαλή στροφική και ομαλή μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα $U=2m/s$. Ετσι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του σώματος την χρονική στιγμή $t=10sec$ θα είναι $U_{cm}=2m/sec$.

Μια σφαίρα και πόσες; κινήσεις;

Η σφαίρα του παρακάτω σχήματος έχει μάζα m=5Kg ακτίνα R=0,3m και αφήνεται από ύψος H=4,05m πάνω από ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο.



Η σφαίρα εισέρχεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και στην συνέχεια την χρονική στιγμή t=0 αρχίζει να ανέρχεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $θ=30^{o}$ το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης με την σφαίρα ίσο με μ=√3/3. Κατά τα πέρασμα από το κεκλιμένο στο οριζόντιο επίπεδο και από το οριζόντιο επίπεδο στο κεκλιμένο επίπεδο το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας δεν μεταβάλλεται. Να βρεθούν:

Α. Ποια χρονική στιγμή αρχίζει η καθαρή κύλιση για την σφαίρα;

Β. Ποια χρονική στιγμή η σφαίρα θα σταματήσει για πρώτη φορά;

Γ. Σε ποιο ύψος θα φτάσει η σφαίρα επιστρέφοντας στο δεύτερο κεκλιμένο επίπεδο.

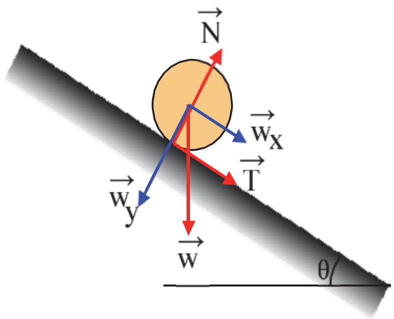
Δίνεται για την σφαίρα $I=0,4M.R^{2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το αρχικό κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο έτσι η σφαίρα θα ολισθαίνει και θα φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα που θα βρεθεί με την βοήθεια της ΑΔΕ

$$m.g.H=1/2.m.u^2 \quad άρα\ u=9m/sec$$

Το οριζόντιο επίπεδο είναι επίσης λείο έτσι θα συνεχιστεί η ολίσθηση της σφαίρας με σταθερή την ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας μέχρι η σφαίρα να φτάσει στο δεύτερο κεκλιμένο επίπεδο. Οταν η σφαίρα θα αρχίσει να ανέρχεται το χαμηλότερο σημείο επαφής της σφαίρας με το κεκλιμένο επίπεδο θα έχει ταχύτητα $U_{κατ}=u_{cm}$. Ετσι θα αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης με φορά προς τα πίσω.



Η σφαίρα λοιπόν θα αρχίσει να επιβραδύνεται μεταφορικά και να επιταχύνεται στροφικά. Από τους νόμους της κίνησης θα έχουμε

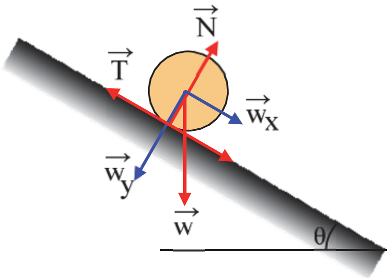
$$m.g.ημ30^o + μ.m.g.συν30^o = m.a \qquad άρα\ a=10m/sec^2.$$

$$μ.m.g.συν30^o.R=0,4.m.R^2.α_{γων} άρα\ α_{γων}=125/3\ rad/sec^2.$$

Για να αρχίσει η καθαρή κύλιση θα πρέπει το κατώτερο σημείο επαφής της σφαίρας να έχει μηδενική ταχύτητα έτσι $U_{cm}=U_{περ}$ άρα

$$u-a.t=α_{γων}.t.R \text{ άρα } t=0,4sec \text{ και } U_{cm}=5m/sec.$$

Β. Μόλις αρχίσει η κύλιση της σφαίρας θα πρέπει να αρχίσει η επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση άρα η φορά της τριβής να αντιστραφεί και από τριβή ολίσθησης να γίνει στατική τριβή.



Από τους νόμους τώρα της κίνησης θα έχουμε

$m.g.ημ30^o - T = m.a_2$ και $T.R=0{,}4.m.R^2.αγ_{ων2}$ θα βρούμε

$a_2=25/7\ m/sec^2$ και T=50/7 N που είναι μικρότερη από την τριβή ολίσθησης $T_{ολ}=25N$ άρα ισχύει και η συνθήκη κύλισης.

Η μεταφορική κίνηση είναι επιβραδυνόμενη έτσι από τον νόμο της ταχύτητα θα βρούμε:

$$U=U_{cm}-a_2.t_2 \quad \text{άρα } t_2=1{,}4sec$$

άρα η σφαίρα θα σταματήσει να ανέρχεται μετά από συνολικό χρόνο $t_{ολ}=1{,}8sec$.

Γ. Το συνολικό διάστημα που θα διανύσει η σφαίρα προς τα πάνω θα είναι $S_1=u.t_1-1/2a_1.t_1^2=2{,}8m$ και $S_2=U_{cm}.t_2-1/2a_2.t_2^2=3{,}5m$.

Αρα το συνολικό μήκος είναι $S_{ολ}=6{,}3m$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από το ανώτερο σημείο στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι το σώμα να ξαναφτάσει στο οριζόντιο επίπεδο θα έχουμε

$m.g.S_{ολ}.ημ30^o = ½\ .0.4.m.R^2.ω^2 +1/2.m.U^2$ θα βρούμε $U=3\sqrt{5}m/sec$.

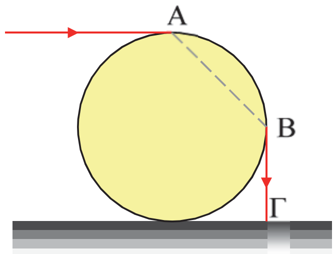
Μετά την επαναφορά του σώματος στο οριζόντιο επίπεδο και στην συνέχεια στο κεκλιμένο επίπεδο δεν υπάρχουν τριβές. Ετσι η στροφική κίνηση της σφαίρας δεν μπορεί να αλλάξει. Αρα η γωνιακή της ταχύτητα θα παραμένει σταθερή. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την κατώτερη θέση μέχρι την ανώτερη στο πρώτο κεκλιμένο επίπεδο θα έχουμε

$$½ .0.4.m.R^2.\omega^2 +1/2.m.U^2 \quad =½ .0.4.m.R^2.\omega^2 + m.g.H_2$$

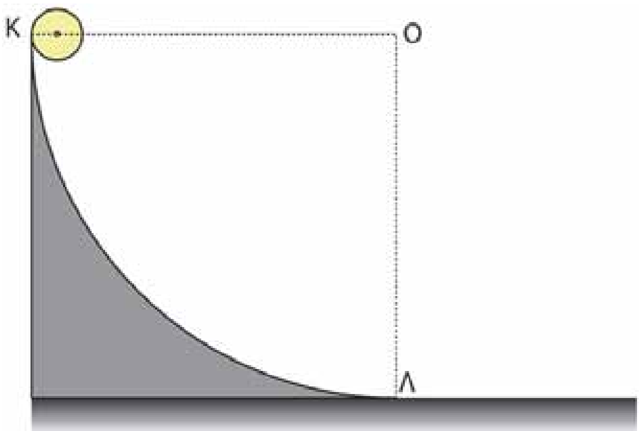
άρα H_2=2,25m

Διάθλαση σε μια σφαίρα, που θα κάνει και … τούμπες.

Ομογενής γυάλινη σφαίρα έχει ακτίνα R=0,2m. Η σφαίρα ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Μονοχρωματική ακτινοβολία προσπίπτει εφαπτομενικά και οριζόντια στο ανώτερο σημείο Α τη σφαίρας και εξέρχεται αφού διαθλαστεί εφαπτομενικά και κατακόρυφα από το σημείο Β όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Στην συνέχεια η γυάλινη σφαίρα τοποθετείται στο ανώτερο σημείο κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ΚΛ ακτίνας R_1= 1,95m με το σημείο Κ στο ανώτερο σημείο και το σημείο Λ στο κατώτερο σημείο του τεταρτοκύκλιου που βρίσκεται πάνω στο οριζόντιο έδαφος. Το κέντρο της σφαίρας και το σημείο Κ βρίσκονται πάνω σε ευθεία παράλληλη προς το έδαφος.



Η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη από το σημείο Κ και αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει μέσα στο τεταρτοκύκλιο.

Α. Να βρείτε τον δείκτη διάθλασης της σφαίρας

Β. Να βρείτε τον συνολικό χρόνο που κάνει η ακτίνα για να φτάσει από το ανώτερο σημείο Α της σφαίρας στο έδαφος στο σημείο Γ.

Γ. Να βρεθεί ο αριθμός των περιστροφών μέχρι η σφαίρα να φτάσει από το σημείο Κ στο σημείο Λ του τεταρτοκύκλιου.

Δ. Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας.

Το $I_{cm σφαίρας}=0{,}4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Αν εφαρμόσουμε νόμο του Snell για την πρώτη διάθλαση θα έχουμε:

$n_1ημθ_1=n_2ημθ_2$ θα πάρουμε $1.1=n_2ημθ_2$ (1).

Αν εφαρμόσουμε νόμο του Snell για την διάθλαση στο σημείο Β θα έχουμε

$n_2ημθ_3=n_1ημ90$ θα πάρουμε $n_2ημθ_3=1$ (2) από την (1) και (2)

θα βγει $θ_2=θ_3$.

Επειδή σχηματίζεται και ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο

$θ_2=θ_3=45^o$

Ετσι από την (1) θα πάρουμε $n_2=\sqrt{2}$.

Β. Για να φτάσει η ακτίνα από το σημείο Α στο έδαφος διανύει το ευθύγραμμο τμήμα AB μέσα στο γυαλί με ταχύτητα C_γ και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ στον αέρα. Το ΒΓ θα προκύψει από το ΠΘ $AB=R\sqrt{2}=0,2\sqrt{2}m$ και το $B\Gamma=R=0,2m$ $n=C_o/C_\gamma$ άρα $C_\gamma=3.10^8/\sqrt{2}m/sec$ από τον νόμο του διαστήματος στην ομαλή κίνηση της ακτίνας μέσα στο γυαλί θα έχουμε

$$R\sqrt{2}=C_\gamma.t_1 \text{ άρα } t_1=4/3\ .10^{-9}sec.$$

Το ίδιο θα εφαρμόσουμε για την διαδρομή ΒΓ.

$$R=C_o.t_2 \text{ άρα } t_2=2/3\ .10^{-9}sec.$$

Αρα ο συνολικός χρόνος θα είναι $t_{ολ}=2.10^{-9}sec.$

Γ. Επειδή η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει μέσα στο τεταρτοκύκλιο για κάθε περιστροφή που εκτελεί διανύει διάστημα

$$2\pi R=0,4\pi m.$$

Το συνολικό μήκος του τετατροκύκλιου είναι $2\pi R_1/4=0,975\pi m$ άρα

$$N=0,975\pi/0,4\pi=2,4375 \text{ περιστροφές.}$$

Δ. Την μέγιστη ταχύτητα θα την έχει η σφαίρα στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς της δηλαδή στο σημείο Λ.Αν εφαρμόσουμε ΑΔΕ από το σημείο Κ στο σημείο Λ θα έχουμε

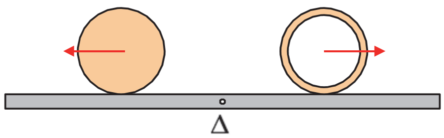
$$U_w=K_{περ}+K_{μετ} \text{ άρα}$$

$$Mg(R_1-R)=\tfrac{1}{2}M\cdot\upsilon^2+\tfrac{1}{2}\,0,4MR^2\omega^2$$

θα πάρουμε $\upsilon=5m/sec$.

Μια σφαίρα, ένα δακτυλίδι και μια ράβδος που ισορροπεί

Πάνω σε ράβδο μάζας $M=20Kg$ που ισορροπεί σε οριζόντια θέση βρίσκονται ακίνητα μία σφαίρα και ένα δακτύλιος με μάζες $M_1=2kg$ και $M_2=2Kg$ αντίστοιχα. Η ράβδος που έχει μήκος $L=12m$ ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια ενός οριζόντιου καρφιού που βρίσκεται στο κέντρο της ράβδου. Το κέντρο μάζας της σφαίρας βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση $d_1=1m$ αριστερά του καρφιού ενώ το δαχτυλίδι βρίσκεται δεξιά από το καρφί και σε απόσταση d_2 από το καρφί. Στο κέντρο της σφαίρας και του δαχτυλιδιού ασκούμε με κατάλληλο τρόπο οριζόντιες δυνάμεις ώστε η σφαίρα και το δαχτυλίδι να αρχίζουν να απομακρύνονται μεταξύ τους κυλιόμενα χωρίς να ολισθαίνουν πάνω στη οριζόντια ράβδο για χρονικό διάστημα $\Delta t=\sqrt{2}$ sec. Η ράβδος στο παραπάνω χρονικό διάστημα συνεχίζει να ισορροπεί.



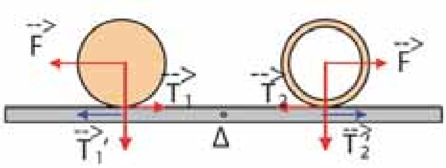
Α. Να βρεθούν τα μέτρα των οριζόντιων δυνάμεων που ασκούνται στο κάθε στερεό.

Β. Να βρεθεί το μέτρο της συνολικής δύναμης που δέχεται η ράβδος από το καρφί για όσο χρόνο κινούνται τα στερεά πάνω στην ράβδο και ισορροπεί το σύστημα.

Γ. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της οριζόντιας απόστασης των κέντρων μάζας των στερεών την στιγμή που.χάνεται η ισορροπία του συστήματος.

Δίνεται το $I_{cmσφ}=0.4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α. Για την ισορροπία της ράβδου μαζί με τις σφαίρες θα έχουμε $Στ(Δ)=0$ άρα $-M_2gd_2+M_1g.d_1=0$ άρα $d_2=1m$. Για να συνεχίσει η ισορροπία του συστήματος και μετά την εκκίνηση των στερεών θα πρέπει τα αποστήματα των δύο βαρών να είναι συνεχώς ίσα. Ετσι θα πρέπει το διανυόμενο διάστημα από το κάθε στερεό να είναι το ίδιο. Αρα και η επιτάχυνση των δύο στερεών θα πρέπει να είναι ίδια. Η ισορροπία θα καταστραφεί όταν τα στερεά χάσουν την επαφή τους με την ράβδο. Αυτό θα συμβεί όταν διανύσουν διάστημα :

$$S=L/2-d_1=6-1=5m.$$

$$S=1/2\, a_{cm1}t^2 \quad \text{άρα } a_{cm1}=a_{cm2}=5m/sec^2.$$

Από τους νόμους του Newton για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα πάρουμε

Για την σφαίρα:

$$F_1-T_{1στ}=M_1.a_{cm1} \;(1) \quad T_{1στ}R_1=0{,}4MR_1^2α_{γων1} \text{ και } T_{1στ}=0{,}4M_1a_{cm1}(2)$$

$$\text{Από (1) και (2)} \quad F_1=1{,}4Ma_{cm1}=14N$$

Για τον δακτύλιο:

$$F_2-Tστ_2=M_2.a_{cm2} \;(3) \quad Tστ_2R_2=MR_2^2\, α_{γων2} \text{ και } Tστ_2=M_2a_{cm2}(4)$$

Από (3) και (4) $F_2=2Ma_{cm2}=20N$

Β. Για να ισορροπεί η ράβδος στο ψψ΄ θα έχουμε:

$$F_{καρψψ'}=M_1g+M_2.g+Mg=240N.$$

Από την (2) $Tστ_1=4N$ και από την (4) $Tστ_2=10N$.

Ετσι στον xx΄ άξονα της ράβδου ασκούνται οι αντιδράσεις των T_1 και T_2 και η δύναμη του καρφιού στον xx΄ που θα πρέπει να έχουν συνισταμένη 0.

$$\text{Αρα } F_{καρxx}'=T_{2'}-T_{1'}=6N.$$

Από το ΠΘ $F_{καρ}=\sqrt{240^2+6^2}=240{,}075N$

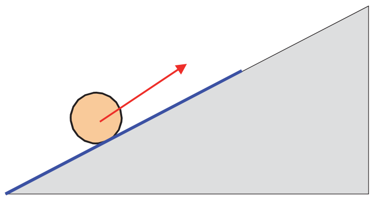
Γ. Ο ρυθμός μεταβολής της οριζόντιας απόστασης των κέντρων μάζας των στερεών θα δίνεται από την σχέση

$\Delta(d_1+d_2+|x_1|+|x_2|)/\Delta t=|U_{cm1}|+|U_{cm2}|=a_{cm1}.t+a_{cm2}.t=$

$=10\sqrt{2}$ m/sec.

Διατηρείται η ενέργεια για την κίνηση της σφαίρας;

Σφαίρα μάζας M=1kg και ακτίνας R=0,1m ανέρχεται κυλιόμενη χωρίς να ολισθαίνει σε ένα παράξενο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^o$ που στην αρχή του παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu=\sqrt{3}/3$ και στην συνέχεια είναι εντελώς λείο. Η σφαίρα την χρονική στιγμή t=0 έχει αρχική ταχύτητα U_o=30m/sec. Την στιγμή t=7sec η σφαίρα μπαίνει στο λείο μέρος του κεκλιμένου επιπέδου.



Να βρεθούν:

A. Το μέγιστο ύψος του κέντρου μάζας της σφαίρας.

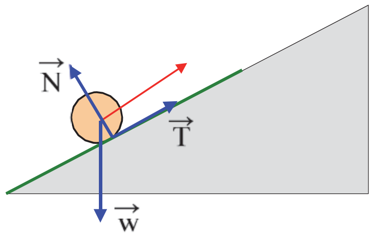
B. Την τελική ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας την στιγμή που αυτή θα περάσει από την αρχική θέση της εκτόξευσής της.

Γ. Γιατί η τελική ταχύτητα δεν είναι πάλι 30m/sec;

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας δίνεται από την σχέση $I_{cm}=0,4MR^2$. $g=10m/sec^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Για την κίνηση της σφαίρας πάνω στο τραχύ κεκλιμένο επίπεδο και για την άνοδο της σφαίρας από του νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε



$\Sigma F=M.a_{cm}$

άρα $Mg\eta\mu\varphi-T_{\sigma\tau}=Ma_{cm}$ (1)

και $T_{\sigma\tau}.R=0,4MR^2.\alpha_{\gamma\omega\nu}$ άρα $T_{\sigma\tau}=0,4Ma_{cm}$ (2) από την (1)

$Mg\eta\mu\varphi-0,4Ma_{cm}=Ma_{cm}$ άρα $a_{cm}=25/7m/sec^2$.

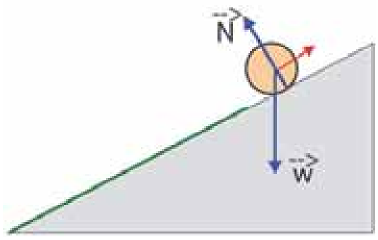
Η σφαίρα λοιπόν εκτελεί επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση και επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση. Μετά λοιπόν από 7sec θα έχει διανύσει διάστημα:

$x_1=U_o.t-1/2a_{cm}.t^2=122,5m.$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα είναι:

$\upsilon=\upsilon_o-a_{cm}.t=5m/sec.$

Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας θα είναι ω=U/R=50r/sec. Μόλις μπαίνει η σφαίρα στο λείο κεκλιμένο επίπεδο παύει να υπάρχει η τριβή. Ετσι η σφαίρα στροφικά έχει σταθερή γωνιακήταχύτητα ω ενώ η U_{cm} μειώνεται λόγω της συνιστώσας του βάρους. Η σφαίρα δηλαδή εκτελεί επιβραδυνόμενη μεταφορικά κίνηση ενώ εκτελεί



ομαλή στροφική κίνηση με την ω που είχε της στιγμή που μπήκε στο λείο επίπεδο.

$\Sigma F=M.a_{cm}'$ $\quad Mg\eta\mu\varphi=Ma_{cm}'$ $\quad$ άρα $\quad a_{cm}'=5m/sec^2$.

Από τον νόμο της ταχύτητα για την επιβραδυνόμενη κίνηση θα έχουμε:

$$U=U_{\alpha\rho\chi}-a_{cm}'t_2$$

άρα t_2=1sec και από το νόμο του διαστήματος για την επιβραδυνόμενη κίνηση θα έχουμε:

$$x_2=U_{\alpha\rho\chi}.t_2-1/2a_{cm}'.t_2^2=2{,}5m.$$

Αρα το συνολικό μήκος της διαδρομής της σφαίρας κατά την άνοδο θα είναι $x_{o\lambda}$=122,5+2,5=125m από $\eta\mu 30^o=H/x_{o\lambda}$ άρα

$$H=62{,}5m.$$

Β. Τώρα η σφαίρα θα αρχίσει να κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο και θα φτάσει στην αρχή του επιπέδου που έχει τριβές με αρχική μεταφορική ταχύτητα U=5m/sec και ω=50r/sec. Το χαμηλότερο όμως σημείο της σφαίρας που είναι σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο έχει συνολική ταχύτητα:

$$U_{o\lambda}=U_{cm}+U_{\pi\varepsilon\rho}=5+5=10m/sec.$$

Ετσι θα εμφανισθεί τριβή ολίσθησης αυτή τη φορά που θα έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο $T=\mu N\sigma\upsilon\nu\varphi=5N$.

Από τον νόμο του Νεύτωνα $\Sigma F=M.a_{cm}$ $\quad$ θα βρω $a_{cm}=0m/sec^2$.

Δηλαδή η σφαίρα αρχίζει να εκτελεί ομαλή μεταφορική κίνηση προς τα κάτω.

Για στροφική κίνηση:

$$T.R=0{,}4MR^2.\alpha_{\gamma\omega\nu}{'} \quad \text{άρα } \alpha_{\gamma\omega\nu}{'}=125rad/sec^2.$$

Για να αρχίσει κανονική κύλιση θα πρέπει η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρα να γίνει -50r/sec έτσι από την σχέση:

$$-50=50-\alpha_{\gamma\omega\nu}{'}.t_3 \quad \text{θα βρούμε } t_3=0{,}8sec.$$

Στον παραπάνω χρόνο η σφαίρα εκτελούσε ομαλή μεταφορική κίνηση προς τα κάτω διανύοντας διάστημα:

$$x_3=\upsilon.t_3=4m.$$

Τώρα η σφαίρα αρχίζει να κυλίεται άρα υπάρχει πλέον στατική τριβή και το σώμα επιταχύνει στροφικά και μεταφορικά σύμφωνα με του νόμους του Νεύτωνα:

$\Sigma F=M.a_{cm}$ άρα $Mg\eta\mu\varphi-T_{\sigma\tau}=Ma_{cm}$ (3) και $T_{\sigma\tau}.R=0{,}4MR^2.\alpha_{\gamma\omega\nu}$ άρα $T_{\sigma\tau}=0{,}4Ma_{cm}$ (4) από την (3): $Mg\eta\mu\varphi-0{,}4Ma_{cm}=Ma_{cm}$ άρα

$$a_{cm}=25/7m/sec^2.$$

Το διάστημα που απομένει μέχρι να φτάσει στην αρχική θέση η σφαίρα είναι 122,5-4=118,5m

Αρα από το νόμο του διαστήματος για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε: $118{,}5=5t_4^2+0{,}5.25/7t_4^2$ θα βρούμε $t_4\approx 6{,}86sec$

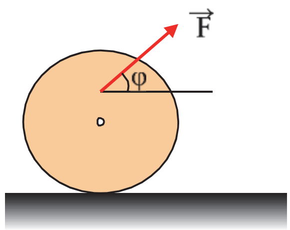
$$\text{Αρα } \upsilon_{cm\tau\varepsilon\lambda}=\upsilon+a_{cm}.t_4\approx 29{,}5 \ m/sec.$$

Γ. Η τελική ταχύτητα δεν είναι ίδια με την αρχική γιατί κατά την είσοδο της σφαίρας στο τραχύ μέρος του κεκλιμένου επιπέδου ασκήθηκε πάνω στην σφαίρα τριβή ολίσθησης άρα παράχθηκε θερμότητα. Η ΑΔΕ από την αρχική στην τελική θέση μπορεί να το αποδείξει αυτό

$$K_{αρχ}=K_{τελ}+Q \quad \text{όπου } Q=\mu Mg\text{συνφ}.4=20J.$$

Σφαίρα και ρυθμός μεταβολής κινητικής Ενέργειας

Μία συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας m=10kg ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στην κατακόρυφη διάμετρο ΑΒ και σε απόσταση ψ=1,4R από το κατώτερο σημείο Β εφαρμόζουμε την στιγμή t=0 μεταβλητή δύναμη $F=20\sqrt{2} + 8\sqrt{2}x$ (S.I) όπου x η οριζόντια μετατόπιση του κέντρου μάζας της σφαίρας από το σημείο x=0 όπου βρίσκεται την χρονική στιγμή t=0. Η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει γωνία $\varphi=45^{o}$ με τον ορίζοντα και έχει φορά προς τα πάνω.



Α. Να αποδείξετε ότι η σφαίρα θα αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

Β. Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας όταν η σφαίρα χάνει την επαφή της με το οριζόντιο δάπεδο.

Γ. Ποιος ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας την στιγμή που χάνει την επαφή της με το δάπεδο.

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας γύρω από το κέντρο μάζας του είναι $I_{cm}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο η σφαίρα θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κύλισης δηλαδή $a_{cm}=a_{γων}.R$.

Έτσι από τους νόμους για την μεταφορική και την στροφική κίνηση θα πάρουμε

$Fx=M.a_{cm}$ (1) $F_x(ψ\text{-}R)=0{,}4M.R^2.a_{γων}$ (2)

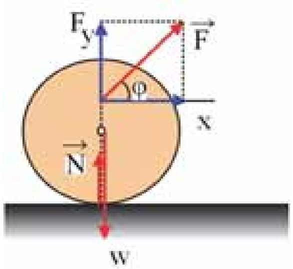
Αν αντικαταστήσουμε την (1) στην (2)

$M.a_{cm}.0{,}4R=0{,}4MR^2.a_{γων}$ άρα $a_{cm}=a_{γων}.R$

Β. Η επαφή θα χαθεί όταν η αντίδραση του επιπέδου θα μηδενιστεί. Για τον άξονα ψψ΄ θα έχουμε:

$N+F_ψ=W$

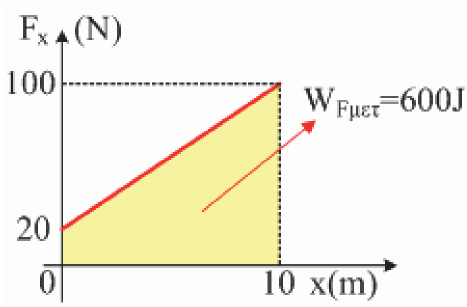
άρα για N=0 θα έχουμε 20+8x=100 άρα x=10m.



Από την ΑΔΕ για την κίνηση του κυλίνδρου θα έχουμε :

$W_{F_{ολ}}=K_{περ}+K_{μετ}$ (3)

Το έργο της μεταβλητής δύναμης για την μεταφορική κίνηση θα βρεθεί από το περικλειόμενο εμβαδό του παρακάτω σχήματος όπου είναι $WF_{μετ}=600J$



Ο λόγος των έργων για την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση είναι και λόγος των κινητικών ενεργειών λόγω μεταφοράς και περιστροφής αντίστοιχα. Έτσι

$$WF_{μετ}/WF_{περ} = K_{μετ}/K_{περ}$$

$$WFμετ/WFπερ=1/2M.U_{cm}^2\ /1/2Iω^2 = 2{,}5$$

Αρα το $WF_{περ}$=240J

Από την (3) $W_{Fολ}=1/2M.U_{cm}^2 + 1/2Iω^2$ με αντικατάσταση θα έχουμε:

$$840=5U^2+2U^2 \text{ άρα}$$

$$υ_{cm}=\sqrt{120}\text{m/s}.$$

Γ. Για τον συνολικό ρυθμό μεταβολής τη κινητικής ενέργειας έχουμε:

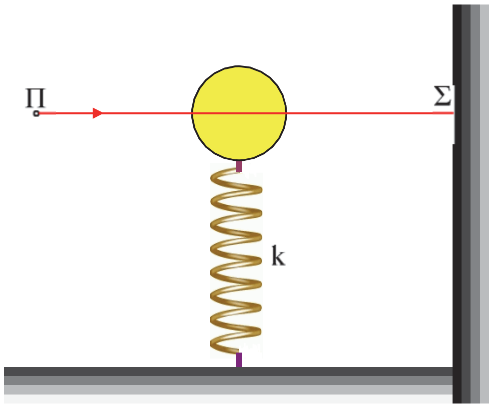
$ΔK_{ολ}/Δt=ΣF_x.U_{cm} + Στ.ω = M.a_{cm}.U_{cm} + I.a_{γων}.U_{cm}/R =$

$=M.a_{cm}.U_{cm} + 0{,}4MR^2.a_{γων}.U_{cm}/R= 1{,}4M.a_{cm}.U_{cm} \rightarrow$

$ΔK_{ολ}/Δt= 1{,}4(20+8x).\sqrt{120}=140\sqrt{120}=280\sqrt{30}$ J/sec

Διάθλαση του φωτός και ταλάντωση σφαίρας

Γυάλινη σφαίρα ακτίνας R=0,3m και μάζας m=2kg είναι δεμένη σε κατακόρυφο ελατήριο και ισορροπεί .Ο Γιάννης παίζει με ένα POINTER LASER στέλνοντας σε οριζόντια διεύθυνση και προς το κέντρο της γυάλινης σφαίρας μία ακτίνα φωτός που κατά τον κινέζο κατασκευαστή του POINTER LASER έχει μήκος κύματος στον αέρα 600nm.



Δίνουμε στην γυάλινη σφαίρα κατακόρυφη ταχύτητα V και η σφαίρα αρχίζει να εκτελεί α.α.τ. Η ακτίνα που παράγει το LASER διέρχεται περιοδικά εφαπτομενικά και οριακά από το κατώτερο και από το ανώτερο σημείο της σφαίρας. Η Νίκη βρίσκεται στον απέναντι τοίχο από τον Γιάννη και παρατηρεί ότι η ακτίνα εμφανίζεται στον τοίχο στο ίδιο ύψος με αυτό της πηγής κάθε Δt=π/2sec. Στη διάρκεια της ταλάντωσης της σφαίρας η μέγιστη χρονική καθυστέρηση που υφίσταται η ακτίνα εξαιτίας της διέλευσης μέσα από την γυάλινη σφαίρα είναι $\Delta t_{max}=2.10^{-9}$sec.

Να βρεθούν:

Α. Ο δείκτης διάθλασης της γυάλινης σφαίρας

Β. Η σταθερά Κ του ελατηρίου και η αρχική ταχύτητα V

Γ. Από πόσα μήκη κύματος αποτελείται η διαδρομή μέσα στο γυαλί όταν η ακτίνα κινείται οριζόντια.

Δίνεται $c=3\cdot 10^8 m/s$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η χρονική καθυστέρηση:

$\Delta t = t_{υλικού} - t_{κενού} = d/V_{υλικου} - d/C = d.n/C - d/C = d(n-1)/C$. (1)

Για να είναι μέγιστη η χρονική καθυστέρηση θα πρέπει η οριζόντια διαδρομή της ακτίνας μέσα στο γυαλί να είναι μέγιστη. Η μέγιστη διαδρομή που μπορεί να διανύσει το φως μέσα στο γυαλί είναι $d_{max}=2R=0,6m$. Από την σχέση (1) θα πάρουμε $n=2$.

Β. Η ακτίνα εμφανίζεται στο ίδιο ύψος με την πηγή στην περίπτωση που δεν εκτρέπεται από την αρχική της πορεία. Αυτό συμβαίνει ή όταν η ακτίνα περνάει επαπτομενικά από το πάνω ή κάτω άκρο της σφαίρας ή όταν πέφτει κάθετα στην επιφάνεια της σφαίρας και περνά από το κέντρο της σφαίρας.

Άρα ο χρόνος $\Delta t=\pi/2 sec$ θα αντιστοιχεί σε χρόνο $T/4$.

Ετσι $T=2\pi$ sec. $T=2\pi\sqrt{m/K}$ άρα $K=2N/m$

Η ταχύτητα V είναι η μέγιστη της ταλάντωσης. Η ακτίνα μόλις και περνάει εφαπτομενικά από το πάνω και κάτω μέρος της σφαίρας άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A=R=0,3m$.

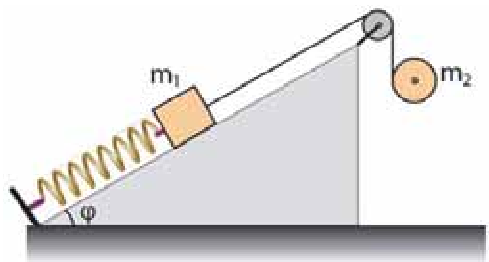
Έτσι $V=\omega.A=0,3m/sec$.

Γ. Το μήκος κύματος μέσα στο γυαλί θα βρεθεί από $n=\lambda_o/\lambda$ άρα $\lambda=300nm$.

Για την διαδρομή 2R θα υπάρχουν $N=2R/\lambda=2.10^6$ μήκη κύματος

Μια ταλάντωση και ένα γιο-γιο.

Το λείο κεκλιμένο επίπεδο του παρακάτω σχήματος έχει γωνία κλίσης $\varphi=30°$. Πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ισορροπεί σώμα μάζας $m_1=1Kg$ με την βοήθεια αβαρούς νήματος, το οποίο συγκρατούμε με το χέρι μας. Την στιγμή $t=0$ αφήνεται ελεύθερος ένας τέλεια ελαστικός κύλινδρος μάζας $m_2=3kg$ και ακτίνας $R_2=1/3$ m που είναι τυλιγμένος αρκετές φορές με το αβαρές νήμα το οποίο συνδέεται μέσω αβαρούς τροχαλίας με το άλλο σώμα μάζας m_1 που ισορροπεί πάνω στο λείο κεκλιμένο επίπεδο. Αφήνουμε το νήμα και παρατηρούμε ότι κατά την πτώση του κυλίνδρου το σώμα μάζας m_1 δεν κινείται.



Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και το σώμα μάζας m_1 αρχίζει να εκτελεί ταλαντώσεις. Αν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου την στιγμή που αυτός χτυπάει στο λείο οριζόντιο έδαφος είναι ίση κατά μέτρο με τη γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του σώματος m_1 να βρεθούν:

Α. Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος m_1

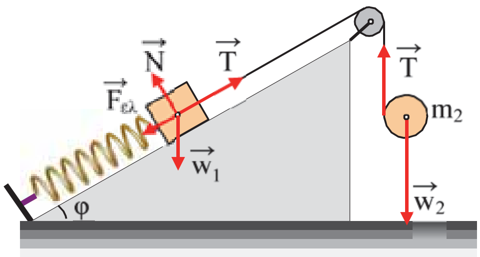
Β. Ποια χρονική στιγμή κόπηκε το νήμα.

Γ. Η γραφική παράσταση της στροφορμής του κυλίνδρου σαν συνάρτηση με το χρόνο αν η κάθε κρούση του κυλίνδρου με το έδαφος θεωρηθεί εντελώς ελαστική.

Να θεωρηθεί ότι το νήμα κόβεται πριν ο κύλινδρος φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο. $I=0.5M\cdot R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Μέχρι να κοπεί το νήμα για τον κύλινδρο θα ισχύουν $\Sigma F=m_2.\alpha_2$ (1) και $\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2) και η επιτάχυνση του κυλίνδρου θα βρεθεί



$\alpha_2=20/3\ m/sec^2$ και η τάση του νήματος T=10N. Πριν το κόψιμο του νήματος το σώμα μάζας m_1 ισορροπεί έτσι $\Sigma F_x=0$ άρα $m_1\cdot g\cdot ημφ+F_{\varepsilon\lambda}=T$ άρα $F_{\varepsilon\lambda}=5N$ άρα το ελατήριο στην αρχική του κατάσταση είναι τεντωμένο κατά $x_1=0{,}05m$. Μετά το κόψιμο του νήματος η θέση ισορροπίας ταλάντωσης θα μεταφερθεί στη θέση όπου $\Sigma F_x{}'=0$ άρα $F_{\varepsilon\lambda}{}'=Kx_2$ με το $x_2=0{,}05m$.

Τη στιγμή που το νήμα κόβεται το σώμα μάζας m_1 δεν έχει ταχύτητα και δε βρίσκεται στην τελική θέση ισορροπίας άρα το πλάτος ταλάντωσης θα είναι $A=x_1+x_2=0{,}1m$.

Β. Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του σώματος m_1 είναι

$$\omega_1=10r/sec$$

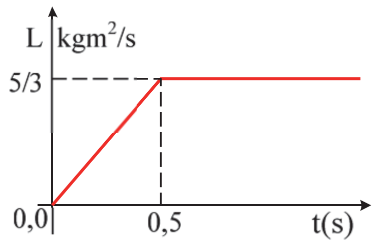
Ο κύλινδρος όταν χτυπά στο έδαφος θα έχει γωνιακή ταχύτητα

$$\omega_2=10r/sec.$$

Μετά το κόψιμο του νήματος ο κύλινδρος έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα μιας και η μοναδική δύναμη που του ασκείται είναι το βάρος του που δεν μπορεί να προκαλέσει ροπή. Αρα την στιγμή που κόβεται το νήμα ο κύλινδρος έχει γωνιακή ταχύτητα

$$\omega_2=\alpha_{\gamma\omega\nu}.t \text{ άρα } t=0,5\text{sec}.$$

Γ. Η κίνηση του κυλίνδρου είναι επιταχυνόμενη στροφικά και μεταφορικά μέχρι να κοπεί το νήμα και επιταχυνόμενη μεταφορική με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέχρι να χτυπήσει στο έδαφος. Εκεί την στιγμή της κρούσης στον κύλινδρο ασκούνται μόνο κεντρικές δυνάμεις η δύναμη του βάρους και η κάθετη αντίδραση του εδάφους (λείο έδαφος) άρα η κρούση δεν μπορεί να αλλάξει την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου. Ετσι η γραφική παράσταση της στροφορμής θα είναι



όπου $L_{\tau\varepsilon\lambda}$=I.ω=5/3 Kg·m^2/sec.

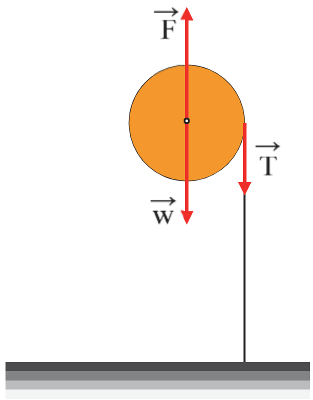
Ένα … ανάποδο γιο-γιο.

Γύρω από ομογενή κύλινδρο μάζας M=2kg και ακτίνας R=0,4m έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα μεγάλου μήκους. Ο κύλινδρος ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το άλλο άκρο του νήματος στερεωμένο στο έδαφος και το νήμα να είναι κατακόρυφο. Ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου κατακόρυφη σταθερή δύναμη μέτρου F=23N με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να αρχίζει να ανεβαίνει και το νήμα να ξετυλίγεται κατακόρυφα. Την στιγμή που το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει ανέβει κατά 2m το νήμα σπάει και ταυτόχρονα καταργείται η δύναμη.
Να βρεθούν:

Α. Η μέγιστη ανύψωση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου
Β. Η συνολική γωνιακή μετατόπιση μέχρι ο κύλινδρος να επιστρέψει στο έδαφος.
Γ. Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου.

Δίνεται το $I_{cm κυλινδρου}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α. Εφαρμόζουμε τους νόμους για την στροφική και μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου:

$$F\text{-}Mg\text{-}T=Ma \quad (1) \quad \text{και } T\cdot R=0{,}5MR^2\alpha_{γων} \ (2)$$

θα βρούμε $a=1m/sec^2$.

Από τον νόμο του διαστήματος για επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση θα έχουμε $h=1/2a\cdot t^2$ άρα $t=2sec$ και από τον νόμο της ταχύτητα στην επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση θα έχουμε $υ=a.t=2m/sec$ η δε γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου θα είναι εκείνη τη στιγμή $ω=ω/R=5rad/sec$.

Μετά το κόψιμο του νήματος και την κατάργηση της δύναμης το σώμα κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του που είναι δύναμη που ασκείται στο κέντρο του κυλίνδρου και δεν μπορεί να προκαλέσει ροπή.

Ετσι ο κύλινδρος εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση και επιβραδυνόμενη μεταφορική μέχρι το μέγιστο ύψος. Από και μετά η κίνηση του κυλίνδρου γίνεται επιταχυνόμενη μεταφορική με φορά προς τα κάτω ενώ εκτελεί και ομαλή περιστροφική κίνηση με την γωνιακή ταχύτητα που είχε αποκτήσει την στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Από το νόμο της ταχύτητας για την επιβραδυνόμενη μεταφορική προς τα πάνω θα πάρουμε $υ=υ_o-gt_{αν}$ $t_{αν}=0,2sec$ και

από τον νόμο του διαστήματος στην επιβραδυνόμενη κίνηση θα έχουμε $H=υ_o \cdot t_{αν}-1/2gt_{αν}^2=0,2m$

Αρα η συνολική μέγιστη ανύψωση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου θα είναι $H_{ολ}=2,2m$

Β. Κατά την άνοδο του κυλίνδρου με την επίδραση της δύναμης ο κύλινδρος εκτελούσε επιταχυνόμενη στροφική κίνηση.

Ετσι η γωνιακή του μετατόπιση θα ήταν $θ_1=1/2α_{γων} \cdot t^2=5rad$.

Για να φτάσει ο κύλινδρος στο έδαφος από το μέγιστο ύψος θα χρειασθεί χρόνο που θα βρεθεί από την σχέση $H_{ολ}=1/2g \cdot t_{καθ}^2$

$$t_{καθ}=\sqrt{0,44}sec=0,66sec.$$

Ο κύλινδρος λοιπόν θα κινηθεί ομαλά στροφικά για συνολικό χρόνο $t_{ολ}=0,86sec$ η γωνιακή μετατόπιση θα είναι

$$θ_2=ω \cdot t_{ολ}=5.0,86=4,3rad.$$

Η συνολική γωνιακή μετατόπιση του κυλίνδρου μέχρι να επιστέψει στο έδαφος θα είναι $θ_{ολ}=9,3rad$.

Γ. Η κινητική ενέργεια έχει τρείς διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής. Μία κατά την διάρκεια της ανόδου με την επίδραση της δύναμης μία κατά την διάρκεια της ανόδου μετά το κόψιμο του νήματος και την κατάργηση της δύναμης και τέλος μία κατά την διάρκεια καθόδου του κυλίνδρου.

Κατά την άνοδο $\Delta K_{ολ}/\Delta t=\Sigma F\cdot υ+\Sigma τ\cdot ω$ που για να γίνει μέγιστη θα πρέπει το υ και το ω να είναι μέγιστα άρα την στιγμή που κόβεται το νήμα θα έχουμε

$$\Delta K/\Delta t\Big|_{max}=6J/sec$$

Κατά την άνοδο με μόνη επίδραση την επίδραση του βάρους

$$\Delta K_{ολ}/\Delta t=-Mg\cdot υ$$

Γιατί $\Delta K_{στ}/\Delta t=0$

Κατά την πτώση $\Delta K/\Delta t=Mg\cdot υ$.

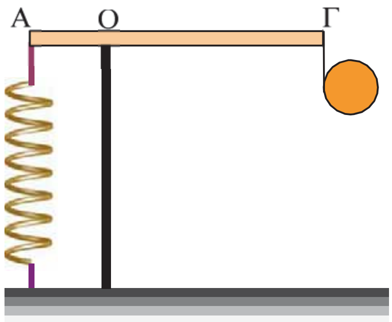
Για να γίνει μέγιστος αυτός ο ρυθμός μεταβολής την κινητικής ενέργειας θα πρέπει το υ να γίνει μέγιστο δηλαδή όταν ο κύλινδρος φτάσει στο έδαφος τότε η

$υ_{max}=g\cdot t_{καθ}=6,6m/sec$ και $\Delta K/\Delta t\Big|_{max}=132J/sec$.

Αρα ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας συμβαίνει όταν ο κύλινδρος φτάνει στο έδαφος και είναι 132J/sec.

Μια ράβδος με γιο-γιο και ένα ελατήριο

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ μήκος $l=4m$ και μάζας $m=1kg$ ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια καρφιού στο σημείο Ο ενός υποστηρίγματος που απέχει από το άκρο Α απόσταση 1m. Το άκρο Α δένεται με ελατήριο φυσικού μήκους $l_o=1,4$ m σταθεράς $K=200$ N/m ενώ στο άλλο άκρο Γ δένεται αβαρές σκοινί που είναι τυλιγμένο σε κύλινδρο μάζας $M=1kg$ και ακτίνας $R=0,3$ m όπως φαίνεται στο παρακάτω στο σχήμα.



Την στιγμή $t=0$ ο κύλινδρος αφήνεται από το σημείο Γ. Κατά την πτώση του κυλίνδρου το σύστημα ισορροπεί οριζόντιο. Την χρονική στιγμή $t_1=\sqrt{0,3}sec$ το νήμα κόβεται και ταυτόχρονα ο σύνδεσμος του ελατηρίου με την ράβδο στο άκρο Α σπάει.

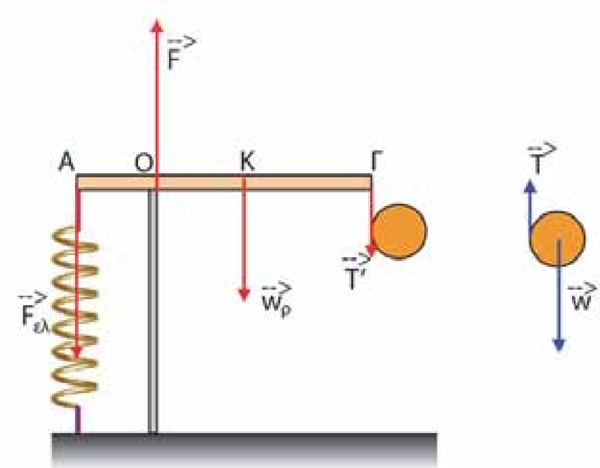
Να βρεθούν :

A. Η κατακόρυφη απόσταση της ράβδου από το έδαφος.
B. Την ολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου όταν χτυπάει για πρώτη φορά στο έδαφος.
Γ. Να εξεταστεί αν η ράβδος μπορεί να χτυπήσει πρώτη στο έδαφος πριν ο κύλινδρος φτάσει στο έδαφος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από το άξονα περιστροφής του $I_{cm}=0,5MR^2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm}=1/12ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την κίνηση του κυλίνδρου όταν είναι δεμένος στο σκοινί θα έχουμε :



$Mg-T=ma_{cm}$ και $T.R=1/2mR^2a_{γων}$ θα πάρουμε:

$$a_{cm}=20/3m/sec^2 \text{ και } T=10/3N.$$

Για την ισορροπία της ράβδου θα πάρουμε

$$-mg(KO)-T.(ΓO)+F_{ελ}.(AO)=0$$

Αρα $x_{ελ}=0,1m$ Αρα το ύψος $H=l_o+x_{ελ}=1,4+0,1=1,5m$

Β. Για την κίνηση του κυλίνδρου όταν ήταν δεμένος με το σκοινί θα έχουμε:

$$h=1/2\ a_{cm}.t^2=1m$$

και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

$$U_{cm}=a_{cm}.t=20\sqrt{0,3}/3m/sec.$$

Από την ΑΔΕ για την πτώση του κυλίνδρου μετά το κόψιμο του σκοινιού θα έχουμε :

$$K_{περ}+K_{μετ}+U_W=K_{τελ}$$

$$\text{άρα}\ \ 1/2I\omega^2+1/2mU_{cm}^2+mg(H\text{-}h\text{-}R)=K_{τελ}$$

και μετά από πράξεις $K_{τελ}=12J$

Γ. Η ράβδος μετά το κόψιμο του σχοινιού και του συνδέσμου του ελατηρίου θα εκτελέσει επιταχυνόμενη στροφικά κίνηση μέχρι την κατακόρυφη θέση (αν έφτανε) εξαιτίας της ροπής του βάρους της. Η ροπή αυτή όμως μειώνεται συνεχώς αφού το απόστημα του βάρους μειώνεται. Την μέγιστη λοιπόν γωνιακή επιτάχυνση την έχει η ράβδος την στιγμή που κόβεται το νήμα και ο σύνδεσμος του ελατηρίου. Αν υποθέσουμε ότι η μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση ήταν σταθερή τότε η ράβδος θα χρειαζόταν ελάχιστο χρόνο που θα έβγαινε από τη σχέση:

$$\theta=1/2\alpha_{γωνmax}.t_{min}^2\ (1)$$

Για την κίνηση της ράβδου την στιγμή που κόβεται το νήμα και ο σύνδεσμος του ελατηρίου:

$$\Sigma\tau(O)=I\alpha_{γωνmax}\quad m.g.(OK)=\{1/12m.l^2+m(OK)^2\}\alpha_{γωνmax}$$

άρα μετά από πράξεις

$$\alpha_{\gamma\omega\nu max}=30/7r/sec^2$$

Τη στιγμή που η ράβδος χτυπάει στο έδαφος σχηματίζει γωνία με την κατακόρυφο γωνία φ με συνφ=1,5/3 δηλαδή $\varphi=60^o$. Άρα η ράβδος θα έχει διαγράψει γωνία θ=π/6.
Με αντικατάσταση στην (1) θα έχουμε

$$t_{min}=\sqrt{(7\pi/90)}sec$$

Αυτός θα ήταν λοιπόν ο ελάχιστος χρόνος που θα μπορούσε να χτυπήσει η ράβδος στο έδαφος αν είχε συνεχώς την ίδια μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση. Στον παραπάνω όμως χρόνο ο κύλινδρος κινείται ομαλά στροφικά αλλά επιταχυνόμενα μεταφορικά με επιτάχυνση τη g. Ετσι στον ίδιο χρόνο θα είχε διανύσει διάστημα

$$H'=U_{cm}.t_{min}+1/2g.t_{min}^2\approx 3m$$

που η απόσταση αυτή είναι μεγαλύτερη από το h_2=H-h-R=0,2m που απείχε ο κύλινδρος από το έδαφος.
Τελικά πρώτος θα χτυπήσει στο έδαφος ο κύλινδρος.

Κρούση δύο ράβδων και χρόνος κρούσης.

Δύο λεπτότατοι ελαστικοί ράβδοι μήκους L_1=0,6m & L_2=0,8m έχουν μάζα M_1=4/3Kg και M_2=3Kg αντίστοιχα μπορούν να περιστρέφονται γύρω από οριζόντιο κοινό άξονα που διέρχεται από το ένα τους άκρο. Στο ελεύθερο άκρο της πρώτης ράβδου μάζας M_1 κολλάμε σημειακό σώμα μάζας m. Οι δύο ράβδοι φέρνονται σε κατακόρυφη θέση και αφήνονται ταυτόχρονα δίνοντας τους ελάχιστη ώθηση έτσι ώστε να κινούνται αντίθετα. Αν οι δύο ράβδοι συγκρουστούν ελαστικά την στιγμή που αποκτούν ταυτόχρονα την μέγιστη κινητική τους ενέργεια να βρεθούν:

Α. Η μάζα m.

Β. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της κάθε ράβδου αμέσως μετά την κρούση τους.

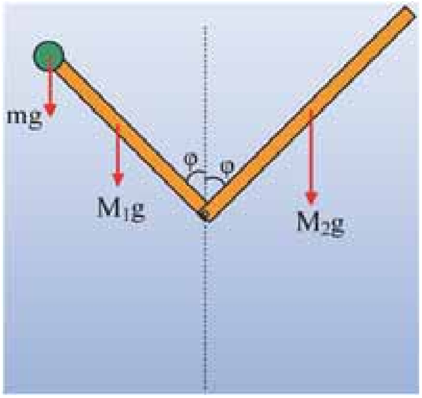
Γ. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m κατά την διάρκεια της κρούσης.

Δ. Ποια από τις δύο ράβδος θα σταματήσει πρώτη για πρώτη φορά και που θα συμβεί αυτό.

Δίνεται για την κάθε ράβδο $I_{cm}=1/12ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Αν οι δύο ράβδοι είχαν συνεχώς την ίδια γωνιακή επιτάχυνση και επειδή η αρχική τους γωνιακή ταχύτητα έχει μηδενικό μέτρο οι ράβδοι θα έφταναν ταυτόχρονα στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς τους εκεί που θα έχουν και την μέγιστη κινητική τους ενέργεια.



Ετσι για την πρώτη ράβδο μαζί με το μπαλάκι της και από το νόμο της στροφικής κίνησης

$$M_1\, g\, ½\, L_1 ημφ + mgL_1 ημφ = I_1 α_{γων} \quad (1)$$

Και για την δεύτερη ράβδο

$$M_2\, g\, ½\, Lημφ = I_2 α_{γων} \quad (2)$$

Αν διαιρέσουμε τις δύο σχέσεις κατά μέλη θα έχουμε

$$M_1(L_2 - L_1) = m(3L_1 - 2L_2)$$

και μετά από πράξεις θα βρούμε

$$M_1 = m \text{ άρα } m = 4/3Kg$$

Β. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από την ανώτερη στην κατώτερη θέση της κάθε ράβδου θα έχουμε

$$M_2 g L_2 = ½\, I_2 ω_2^2$$

και μετά τις πράξεις θα βρούμε $ω_2 = 5\sqrt{3}$ r/s

$$M_1gL_1+mg2L_1= ½\ I_1\omega_1^2$$

και μετά τις πράξεις θα βρούμε $\omega_1= 5\sqrt{3}$ r/s ίδια φυσικά κατά μέτρο με την ω_2 μιας και οι δύο ράβδοι έχουν κοινό χρόνο κίνησης με συνεχώς την ίδια στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση.

Παρατηρώ ότι

$$I_1= 1/3\ M_1L_1^2+mL_1^2 =0{,}64kgm$$

$$\text{και}\ \ I_2=1/3M_2L_2\ =0{,}64kgm\ .$$

Υπάρχει ελαστική κρούση δύο ράβδων που έχουν την ίδια ροπή αδράνειας άρα κατ' αναλογία με τις κεντρικές ελαστικές κρούσεις των σημειακών σωμάτων οι ράβδοι θα ανταλλάξουν γωνιακές ταχύτητες έτσι τα μέτρα των δύο νέων γωνιακών ταχυτήτων θα είναι και πάλι

$$\omega_1' =\omega_2' = 5\sqrt{3}\ r/s$$

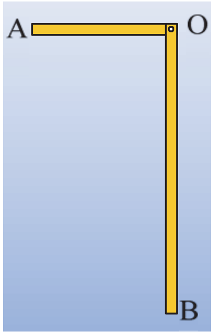
Γ. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της μάζας m πριν αλλά και μετά την κρούση θα είναι:

$$u_1=u_1'=\omega L_1= 3\sqrt{3}\ m/s$$

$$\text{Άρα}\ \Delta P=mu_1'-(-mu_1)=2mu_1= 8\sqrt{3}\ kgm/s$$

Δ. Η κάθε ράβδος θα αρχίσει να ανεβαίνει προς την αντίθετη της αρχικής κατεύθυνσης αλλά και πάλι με την ίδια ακριβώς γωνιακή επιβράδυνση αυτή τη φορά. Επειδή οι αρχικές γωνιακές ταχύτητες κατά μέτρο των δύο ράβδων είναι ίδιες οι ράβδοι θα φτάσουν ταυτόχρονα και πάλι στην αρχική τους θέση έχοντας μηδενική γωνιακή ταχύτητα όση ήταν και η αρχική τους φυσικά μιας και δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας κατά την κρούση.

Κρούση δύο ράβδων.



Δύο ομογενείς ελαστικές πρισματικές ράβδοι με αμελητέο πλάτος, η ΟΑ και η ΟΒ, με μάζες M_1=1Kg και M_2=0,25kg αντίστοιχα. Το μήκος της ράβδου ΟΑ είναι L_1= 1,2 m ενώ το μήκος της ράβδου ΟΒ είναι L_2=2,4m και οι δύο ράβδοι μπορούν (λόγω του αμελητέου πλάτους τους) να στρέφονται χωρίς τριβές στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κοινό τους άκρο Ο και είναι κάθετος στη διεύθυνσή τους. Κρατάμε αρχικά την ράβδο ΟΑ στην οριζόντια διεύθυνση και την αφήνουμε ελεύθερη. Η δεύτερη ράβδος ΟΒ ισορροπεί κατακόρυφη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα .

Να βρεθούν:

Α. Η γωνιακή ταχύτητα της κάθε ράβδου αμέσως μετά την ελαστική κρούση των δύο ράβδων

Β. Να βρεθεί ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής του μέτρου της στροφορμής της κάθε ράβδου μετά την κρούση

Γ. Αν θα ξαναγίνει κρούση των δύο ράβδων.

$I_o=1/3ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της πρώτης ράβδου και μέχρι την ελαστική της κρούση με τη δεύτερη ράβδο θα έχουμε

$M_1gL_1/2= ½ I\omega_1^2$ θα βρούμε $\omega_1=5r/s$

Επειδή η κρούση των δύο ράβδων είναι ελαστική κατά αντιστοιχία με την ελαστική κρούση των δύο σφαιρών θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τους τύπους της ελαστικής κρούσης για ακίνητη και κινούμενη σφαίρα. Έτσι

$$\omega_1' = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\omega_1 \quad \text{θα βρούμε } \omega_1' = 0 r/s$$

$$\omega_2' = \frac{2I_1}{I_1 + I_2}\omega_1 \quad \text{θα βρούμε } \omega_2' = 5 r/s$$

δηλαδή μιας και οι δύο ράβδοι έχουν την ίδια ροπή αδράνειας $I_1=I_2=0,48 Kg\cdot m^2$ θα ανταλλάξουν γωνιακές ταχύτητες.

Β. Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κάθε ράβδου θα συμβεί όταν η ροπή του βάρους της κάθε ράβδου θα γίνει μέγιστη. Για την πρώτη ράβδο ο ρυθμός θα είναι 0 μιας και η ράβδος θα μείνει ακίνητη. Για τη δεύτερη ράβδο ο μέγιστος ρυθμός θα συμβεί στην οριζόντια θέση μιας και εκεί το απόστημα του βάρους της αποκτά μέγιστη τιμή. Θα πρέπει όμως να ελέγξουμε αν η ράβδος θα φτάσει στην οριζόντια θέση. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο της δεύτερης ράβδου θα έχουμε

$$\frac{1}{2} I_2 \omega_2'^2 = M_2 g \frac{L_2}{2} + K \quad \text{θα βρούμε } K = 3J$$

Επειδή η ράβδος φτάνει στην οριζόντια θέση εκεί η ράβδος θα έχει και τον μέγιστο ρυθμό του μέτρου της στροφορμής

$$\Delta L/\Delta t = M_2 g L_2/2 = 3 N\cdot m$$

Γ. Για να μη ξανασυμβεί κρούση των δύο ράβδων θα πρέπει η δεύτερη ράβδος να μην επιστρέψει ποτέ στην αρχική της θέση αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν η ράβδος κάποια στιγμή ισορροπήσει. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στην κατακόρυφη θέση για την ράβδο. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο της ράβδου και μέχρι το ανώτερό της σημείο θα έχουμε

$$\frac{1}{2}I_2\omega_2'^2 = M_2 g L_2 + K_{\tau\varepsilon\lambda}$$

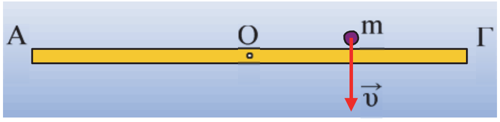
θα βρούμε μετά από τις πράξεις ότι $K_{\tau\varepsilon\lambda}$=0J.

Αρα η δεύτερη ράβδος μόλις που φτάνει στην κατακόρυφη θέση έχοντας μηδενική γωνιακή ταχύτητα.

Έτσι δεν πρόκειται να ξανασυμβεί δεύτερη κρούση.

Δυο κρούσεις ράβδου με σημειακή μάζα

Λεπτότατη ομογενής ράβδος ΑΓ με μήκος $L = \dfrac{3{,}2\sqrt{3}}{3} m$ έχει μάζα $M = \dfrac{9\sqrt{3}}{\pi} kg$ και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω



από οριζόντιο άξονα Ο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια . Σημειακό σώμα μάζας m=1Kg χτυπάει κάθετα την οριζόντια ράβδο με ταχύτητα μέτρου υ σε απόσταση L/4 από το σημείο Ο και ανακλάται στιγμιαία με νέα ταχύτητα μέτρου υ΄ και πάλι κατακόρυφα με φορά προς τα πάνω. Αν τα δύο σώματα ξανασυγκρουστούν στο άκρο Α της ράβδου ενώ το η ράβδος έχει διαγράψει γωνία θ και ενώ το σημειακό σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο να βρεθούν:

Α. Το μέτρο της ταχύτητας υ ΄ του σημειακού σώματος μετά την πρώτη κρούση

Β. Το μέτρο της ταχύτητας υ του σημειακού σώματος την στιγμή της πρώτης κρούσης

Γ. Το μέτρο της ταχύτητας του σημειακού σώματος αμέσως μετά την δεύτερη κρούση αν μετά τη δεύτερη κρούση η ράβδος μείνει ακίνητη.

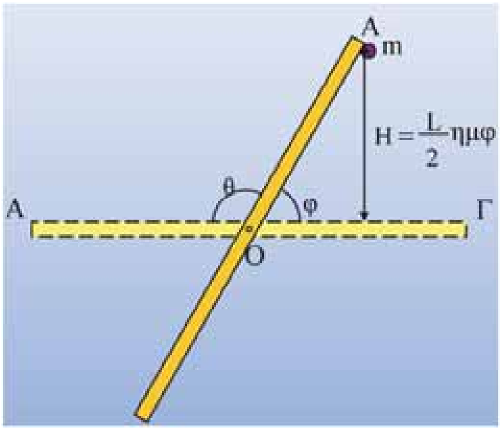
$I_{cm} = \dfrac{1}{12} ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Όταν η ράβδος διαγράψει γωνία θ με τη βοήθεια της παραπληρωματικής γωνίας φ θα βρούμε

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{L/4}{L/2} = 0{,}5$$

άρα η γωνία φ=60^o και η γωνία θ=2π/3 rad. Το ύψος που διέγραψε το σημειακό σώμα είναι Η και θα δίνεται με τη βοήθεια του σχήματος



Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του σημειακού σώματος και μέχρι την κρούση του με τη ράβδο θα έχουμε

½ $m\upsilon'^2$ =mgH θα βρούμε υ΄=4m/s.

Β. Με την βοήθεια του νόμου της ταχύτητας για το σημειακό σώμα μπορούμε να βρούμε το χρόνο ανόδου του σώματος

$\upsilon=\upsilon'-gt_{\alpha\nu}$ άρα $t_{\alpha\nu}=0{,}4s$

Στον ίδιο χρόνο όμως η ράβδος διέγραψε γωνία θ=2π/3 rad εκτελώντας ομαλή στροφική κίνηση μέχρι να γίνει η σύγκρουση

$$\theta=\omega t \quad \text{άρα } \omega=10\pi/6 \text{ r/s}$$

Επειδή η κρούση είναι στιγμιαία μπορούμε να εφαρμόσουμε ΑΔΣ για την πρώτη κρούση του σημειακού σώματος με τη ράβδο

$$L_{αρχ}=L_{τελ} \qquad \text{ή} \quad m\upsilon L/4 = I_{cm}\omega - m\upsilon' L/4$$

και μετά από πράξεις να βρούμε $\upsilon=12 m/s$.

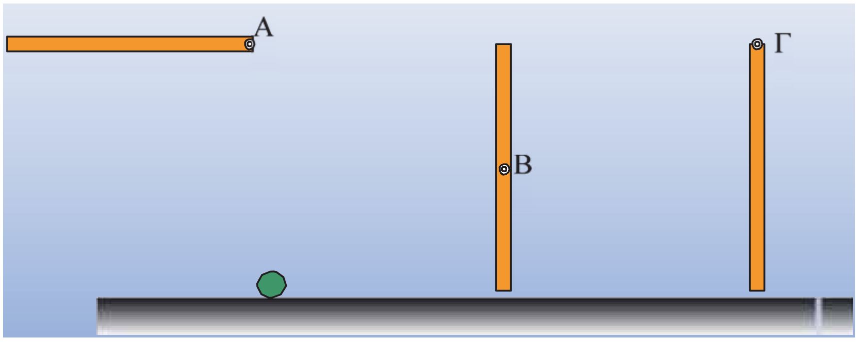
Γ. Με τη βοήθεια της ΑΔΣ για την δεύτερη κρούση θα έχουμε

$$\frac{1}{12}ML^2\omega = m\upsilon''\cdot\frac{L}{2}$$

μετά από τις πράξεις θα βρούμε $\upsilon''=2{,}5\sqrt{3}m/s$

Τρεις περιστρεφόμενες ράβδοι.

Τρεις ράβδοι ίδιας μάζας M=3kg και ίδιου μήκους L=1,2m μπορούν να στέφονται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιους άξονες έτσι ώστε το χαμηλότερό τους σημείο μόλις και να έρχεται σε επαφή με το οριζόντιο λείο έδαφος. Η μεσαία ράβδος περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της σημείο Β ενώ οι δύο ακριανές γύρω από το ανώτερο τους σημείο Α και Γ αντίστοιχα. Η πρώτη ράβδος ανασηκώνεται έτσι ώστε να γίνει οριζόντια και αφήνεται ελεύθερη. Μόλις φτάσει στο κατώτερό της σημείο συγκρούεται με ακίνητο σημειακό σώμα μάζας m=1kg όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν μετά από κάθε κρούση το σώμα που κινούνταν παραμένει ακίνητο και οι ράβδοι δεν μπορούν να συ- γκρουστούν μεταξύ τους να βρεθούν:

Α. Η απώλεια ενέργειας σε κάθε κρούση

Β. Πόσες κρούσεις θα πραγματοποιηθούν μέχρι να επαναληφθεί η εικόνα του αρχικού σχήματος και πόσες συνολικά κρούσεις θα πραγματοποιηθούν.

Γ. Να γίνει ποιοτικά το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας της κάθε ράβδου σε συνάρτηση με το χρόνο, στους ίδιους άξονες.

$I_{cm}=1/12\ M\ L^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της πρώτης ράβδου θα έχουμε

$$M\ g\ L/2=½\ I\ \omega^2 \text{ άρα } \omega=5\ r/s.$$

Για την πρώτη κρούση της ράβδου με το σημειακό σώμα θα έχουμε

$$I_A\ \omega=m\ \upsilon\ L \text{ θα βρούμε } \upsilon=6m/s$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κρούση

$$½\ I\ \omega^2=½\ m\ \upsilon^2+Q_{κρ1}$$

μετά από πράξεις $Q_{κρ1}=0J$ άρα η πρώτη κρούση είναι ελαστική.

Για τη δεύτερη κρούση του σημειακού σώματος με τη μεσαία ράβδο θα έχουμε με τη βοήθεια της ΑΔΣ

$$m\ \upsilon\ L/2=I_{cm}\ \omega_2$$

μετά από πράξεις $\omega=10r/s$

και με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την δεύτερη κρούση θα έχουμε

$$½\ m\upsilon^2=½\ I_{cm}\ \omega_2^2+Q_{κρ2}$$

άρα θα βρούμε $Q_{κρ2}=0J$

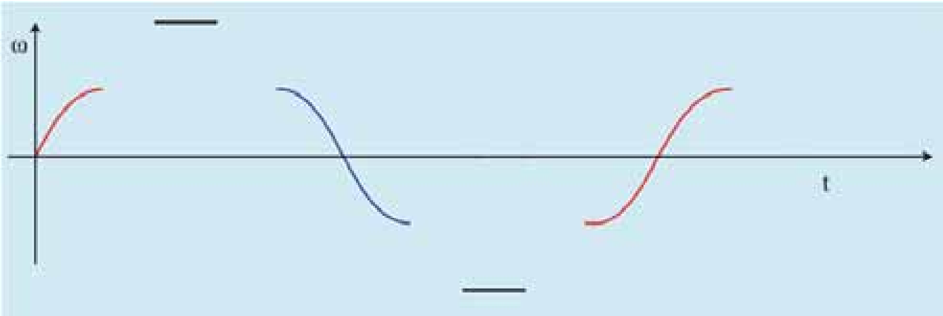
Άρα και η δεύτερη κρούση είναι ελαστική.

Η δεύτερη ράβδος θα κάνει τώρα μισή περιστροφή γύρω από τον οριζόντιο άξονα Β και θα ξαναχτυπήσει το σημειακό σώμα που είχε μείνει ακίνητο στην αρχική του θέση μετά την κρούση του με την μεσαία ράβδο. Έτσι θα έχουμε επανάληψη της δεύτερης κρούσης από την αντίθετη μεριά. Έτσι το σημειακό σώμα θα φύγει με ταχύτητα υ=6m/s με πορεία προς την τρίτη ράβδο με τη δεύτερη ράβδο να μένει ακίνητη και φυσικά χωρίς πάλι καμία απώλεια ενέργειας.

Το σημειακό σώμα τώρα θα συγκρουστεί με την τρίτη ράβδο που είναι και πάλι η αντίστροφη πορεία της πρώτης κρούσης. ΄Ετσι και πάλι το φαινόμενο θα επαναληφθεί από την ανάποδη μεριά της πρώ- της κρούσης. Έτσι η τρίτη ράβδος θα ξεκινήσει με γωνιακή ταχύτητα ω=5r/s για να φτάσει στην οριζόντιά της θέση και να ξαναγυρίσει για να ξαναχτυπήσει το σημειακό σώμα μάζας m. Επειδή όλες οι κρούσεις είναι τελικά ελαστικές δεν θα υπάρχει απώλεια ενέργειας άρα $Q_{απ}$=0J

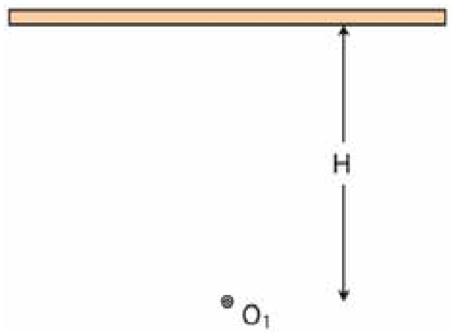
Β. Για να εμφανιστεί ξανά η αρχική εικόνα με την πρώτη ράβδο σε οριζόντια θέση θα πρέπει η σημειακή μάζα να επιστρέψει στην αρχική της θέση. Έτσι θα έχουν πραγματοποιηθεί 2 κρούσεις με την πρώτη ράβδο 4 κρούσεις με την μεσαία ράβδο αλλά και άλλες δύο κρούσεις με την δεξιά ράβδο. ‘Αρα συνολικά 8 κρούσεις. Επειδή δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας το φαινόμενο δεν θα σταματήσει ποτέ. Έτσι θα εκτελεστούν άπειρες κρούσεις.

Γ. Στο παρακάτω διάγραμμα με κόκκινο χρώμα είναι η γωνιακή ταχύτητα της α΄ράβδου, με μπλε της β΄ και με μπλε της γ΄ ράβδου.


ω
t

Μια αναδίπλωση ράβδου.

Για να διπλώσει μία λεπτή ράβδο από μαλακό σίδηρο μάζας m=2Kg και μήκους l=1m ακριβώς στη μέση ο Μπάρμπα-Γιάννης ο σιδεράς χρειάζεται να δαπανήσει ελάχιστη χημική ενέργεια Emin=5J. Η ίδια ράβδος αφήνεται να πέσει ελεύθερα έτσι ώστε το κέντρο μάζας της να βρίσκεται σε ύψος H=0,5 m πάνω από ακλόνητο οριζόντιο καρφί O_1 όπως στο παρακάτω σχήμα.



Μετά την κρούση της ράβδου με το οριζόντιο ακλόνητο καρφί η ράβδος διπλώνει (χωρίς να αναπηδήσει) και σταματάει ακριβώς την στιγμή που τα δύο της κομμάτια γίνονται κατακόρυφα. Να βρεθούν:

Α. Η θερμότητα που θα αναπτυχθεί κατά την κρούση του καρφιού με την ράβδο μέχρι να ισορροπήσει τελικά το σύστημα.

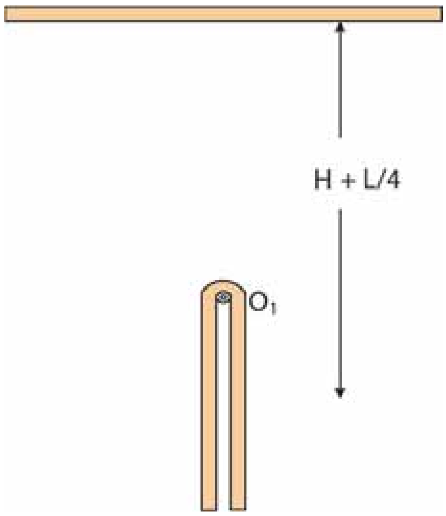
Β. Την κινητική ενέργεια της ράβδου την στιγμή που τα δύο κομμάτια της σχηματίζουν γωνία 90^o.

Γ. Αν η ράβδος αρχικά βρισκόταν σε μεγαλύτερο του αρχικού ύψους θα άλλαζε η τελική κατάσταση ισορροπίας αν η κρούση των δύο κομματιών ήταν τώρα πλαστική;

Δίνεται ημ45^o=0,7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική θέση της ράβδου θα έχουμε $M.g.(H+L/4)=E_{min}+Q_{κρ}$ άρα μετά από πράξεις $Q_{κρ}=10J$



Β. Για να σχηματίσουν τα δύο κομμάτια της ράβδου γωνία 90^o θα πρέπει το κάθε κομμάτι να έχει διαγράψει γωνία 45^o δηλαδή η ράβδος να έχει λυγίσει κατά την μισή της της τελικής της γωνίας. Ετσι με τη βοήθεια και πάλι της ΑΔΕ

$$M.g.(H+L ημ45^o/4)=E_{min}/2+Q_{κρ}+K$$

άρα μετά τις πράξεις K=1J

Γ. Αν το αρχικό ύψος ήταν μεγαλύτερο του αρχικού τα δύο κομμάτια της ράβδου θα έφταναν ταυτόχρονα στην ίδια κατακόρυφη θέση έχοντας ίσες κατά μέτρο γωνιακές ταχύτητες αλλά αντίθετης φοράς. Ετσι μετά την πλαστική κρούση των δύο ράβδων με την βοήθεια της ΑΔΣ

$$I_1.\omega_1-I_2.\omega_2=(I_1+I_2).\omega_{\sigma\upsilon\sigma}$$

και επειδή

$I_1=I_2$ και $I\omega_1I=I\omega_2I$ το $\omega_{\sigma\upsilon\sigma}=0$ r/sec.

Το Στ=0 και ΣF=0 άρα το σύστημα θα ισορροπούσε στην τελική κατακόρυφη θέση.

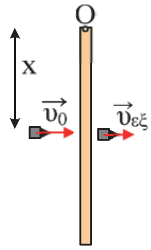
Ανοίγοντας μια οπή σε ξύλινη ράβδο

Ξύλινη ομογενής ράβδος μάζας M=1,2Kg και μήκους l=2m ισορροπεί κατακόρυφη με την βοήθεια οριζόντιου καρφιού που υπάρχει στο ανώτερο άκρο της ράβδου. Για να ανοίξουμε μία μικρή σημειακή οπή και να αφαιρέσουμε όλη τη μάζα του ξύλου που περιέχει η οπή χρειάζεται να δαπανήσουμε ελάχιστη ενέργεια E_{min}= 30/7 J. Η μάζα του ξύλου που θα αφαιρεθεί για να ανοίξει η οπή είναι Δm=0,2Kg. Ειδικό βλήμα μάζας m=0,8Kg κινείται με οριζόντια ταχύτητα U_o μόλις και διαπερνά την ξύλινη ράβδο συμπαρασέρνοντας και όλη τη μάζα που βρίσκει μπροστά του.Η δημιουργία της οπής δεν αλλάζει θέση στο κέντρο μάζας της ράβδου ενώ η μάζα του βλήματος μετά την διέλευσή του μέσα από την ξύλινη ράβδο γίνεται m΄=1Kg. Αν η ράβδος που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το οριζόντιο καρφί μόλις και καταφέρνει να φτάσει σε οριζόντια θέση να βρεθούν:

Α. Η απόσταση του βλήματος από τον άξονα περιστροφής την στιγμή της κρούσης.
Β. Η ροπή αδράνειας της ξύλινης ράβδου μετά την κρούση με το βλήμα αν η οπή θεωρηθεί σημειακή.
Γ. Η αρχική ταχύτητα του ειδικού βλήματος πριν την κρούση με την ξύλινη ράβδο.
Δ. Την θερμότητα που θα παραχθεί κατά την παραπάνω κρούση.

Δίνεται για την ράβδο I_o=1/3.M.L^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α. Για να μην αλλάξει θέση το κέντρο μάζας της ξύλινης ράβδου η μάζα που αφαιρέθηκε αφαιρέθηκε από το κέντρο μάζας της . Άρα το x=L/2=1m.

Β. Η ροπή αδράνειας της ράβδου θα δοθεί από την σχέση $I=1/3.M.L^2-\Delta m.x^2$ (1) αν φυσικά υποθέσουμε ότι όλη η μάζα που αφαιρέσαμε ήταν συγκεντρωμένη σε ένα υλικό σημείο στο κέντρο της ράβδου.

Από την σχέση (1) μετά από πράξεις θα βρούμε $I=1,4Kg.m^2$.

Γ. Με τη βοήθεια της ΑΔΣ για το σύστημα βλήματος-ράβδου θα έχουμε

$$m.U_o.x=I.\omega + (\Delta m+m)U_{εξ}.x \quad (2)$$

Το βλήμα μόλις και καταφέρνει να εξέλθει από την ξύλινη ράβδο. Δηλαδή η ταχύτητα του βλήματος κατά την έξοδο του από την ράβδο είναι ίση με γραμμική ταχύτητα του σημείου της ράβδου όπου έγινε η οπή από το βλήμα. Ετσι θα ισχύει η σχέση $U_{εξ}=\omega.x$ (3)

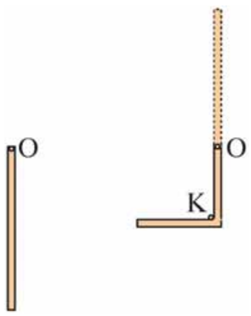
Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο της ράβδου μέχρι την οριζόντια θέση θα έχουμε

$½.I.\omega^2=(M-\Delta m).g.L/2$ άρα $\omega=10/\sqrt{7}$ r/s Από την σχέση (3) $U_{εξ}=10/\sqrt{7}$ r/s και από την σχέση (2) $U_o=30/\sqrt{7}$ m/s

Δ. Με την βοήθεια της ΑΔΕ πριν και μετά την κρούση θα πάρουμε $K_{αρχ}=K_{τελ}+K_{ραβ}+E_{min}+Q$ μετά από πράξεις θα βρούμε Q=30J

Μια ράβδος που μετατρέπεται σε γωνία.

Μία λεπτή σιδερένια ράβδος έχει μήκος L= 40cm και μάζα M= 0,6 kg. Για να λυγίσει την παραπάνω ράβδο ακριβώς στην μέση και να σχηματίσει γωνία 90^o ο Μπάρμπα-Γιάννης ο σιδεράς χρειάζεται να δαπανήσει ελάχιστη χημική ενέργεια 1,5 J. Η ράβδος συνδέεται με οριζόντιο καρφί Ο στο ανώτερό της σημείο και αφήνεται από την κατακόρυφη θέση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Μόλις η ράβδος γίνει κατακόρυφη χτυπάει σε ακλόνητο καρφί Κ που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με την αρχική θέση της ράβδου και απέχει από το καρφί Ο απόσταση L/2. Η σύγκρουση της ράβδου με το καρφί Κ επιφέρει την παραμόρφωση της ράβδου με αποτέλεσμα η ράβδος να σταματήσει στιγμιαία μόλις σχηματίσει ορθή γωνία. Το καρφί Κ δεν ενσωματώνεται στη ράβδο και μετά τον σχηματισμό της ορθής γωνίας της ράβδου αφαιρείται ακαριαία. Να βρεθούν:

Α. Η απώλεια ενέργειας κατά την κρούση της ράβδου με το καρφί Κ

Β. Το μέτρου του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου την στιγμή που σχηματίζεται η ορθή γωνία .

Γ. Σε ποια γωνία σε σχέση με την κατακόρυφη το σύστημα θα αποκτήσει μέγιστη γωνιακή ταχύτητα μετά τον σχηματισμό της ορθής γωνίας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με εφαρμογή της ΑΔΕ από την αρχική κατάσταση στην τελική κατάσταση θα έχουμε

$$Mg(L+L/2) = M/2\ .g.(L/2 + L/4) + M/2\ .g.L/2 + U_{παραμόρφωσης} + Q_{κρούσης}$$

$$Q_{κρούσης}=0{,}6J$$

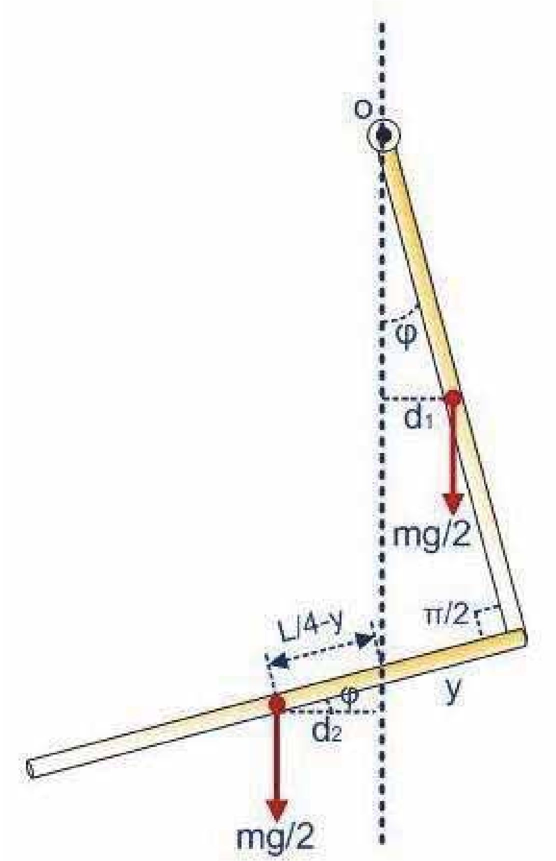
Β. Την στιγμή που σχηματίζεται η ορθή γωνία η μοναδική δύναμη που προκαλεί ροπή είναι η δύναμη του βάρους της οριζόντιας μισής ράβδου έτσι

$$\Delta L/\Delta t=M/2\ .g.L/4=\ 0{,}3\ \ N.m$$

Γ. Η δύναμη λοιπόν του βάρους της οριζόντιας μισής ράβδου θέλει να επιταχύνει την ράβδο ενώ η ροπή του βάρους της κατακόρυφης ράβδου θέλει να επιβραδύνει την ράβδο. Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου θα επιτευχθεί την στιγμή που οι δύο ροπές γίνουν ίσες.

Οι δυνάμεις είναι ίσες άρα όταν και τα αποστήματα των ροπών θα γίνουν ίσα.

Με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος θα πάρουμε



Αν ονομάσω γωνία φ την γωνία ανάμεσα στην κατακόρυφη και το L/2 που συνδέεται με το καρφί Ο θα ισχύει για το απόστημα του βάρους ημφ=d_1/L/4 Για την απέναντι πλευρά του τριγώνου θα ισχύει εφφ=ψ/L/2

Για το απόστημα του βάρους της άλλης πλευράς θα ισχύει

συνφ=d_2/(L/4 –ψ)

Επειδή πρέπει d_1=d_2 θα έχουμε Lημφ/4 =(L/4 –Lεφφ/2)συνφ

άρα εφφ=1/3

Πλαστική κρούση δύο ράβδων

Δύο λεπτοί ράβδοι από σίδηρο έχουν μήκος L_1=1,2m και $L_2=4L_1$ αφήνονται από οριζόντια θέση και φτάνουν ταυτόχρονα στην κατακόρυφη θέση τους όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Οι δύο ράβδοι έχουν κοινό οριζόντιο άξονα περιστροφής το ανώτερο σημείο της κάθε ράβδου. Η μάζα της μικρής ράβδου είναι m_1=1kg. Την στιγμή της κρούσης των δύο ράβδων μέσω μιας ασφάλειας οι δύο ράβδοι κλειδώνουν μεταξύ τους έτσι ώστε το σύστημα να συμπεριφέρεται πλέον σαν μία ράβδος. Να βρεθούν:

Α. Οι μέγιστες γωνιακές ταχύτητες των δύο ράβδων πριν την πλαστική τους κρούση

Β. Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων μετά την πλαστική τους κρούση

Γ. Το συνημίτονο της μέγιστης γωνίας σε σχέση με την κατακόρυφη που θα διαγράψει το σύστημα των δύο ράβδων μετά την πλαστική τους κρούση.

Δίνεται για την κάθε ράβδο $I_o=1/3M.L^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η κάθε ράβδος θα έχει μέγιστη γωνιακή ταχύτητα την στιγμή που παύει να υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση που θα οφείλεται στη ροπή του βάρους της. Αυτό συμβαίνει για την κάθε ράβδο στην κατακόρυφη θέση της κάθε ράβδου. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κάθε ράβδο θα έχουμε :

$$M.g.L/2=1/2\ .1/3.M.L^2.\omega^2 \quad \text{άρα } \omega=\sqrt{3}.g/L$$

και για τις δύο ράβδους θα έχουμε:

$$\omega_1=5r/s \quad \text{και} \quad \omega_2=2,5r/s.$$

Β. Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων θα είναι το άθροισμα των ροπών αδράνειας της κάθε ράβδου. Η δεύτερη ράβδος που είναι από το ίδιο υλικό με την πρώτη θα έχει τετραπλάσια μάζα γιατί έχει τετραπλάσιο μήκος. Έτσι η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι:

$$I_{ολ}=1/3M_1.L_1^2+1/3M_2.L_2^2=31,2kg.m^2.$$

Γ. Για την πλαστική κρούση αν εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα των δύο ράβδων και θεωρώντας θετική την στροφορμή της μεγάλης ράβδου θα έχουμε

$$I_2.\omega_2-I_1.\omega_1=I_{ολ}.\omega_{συστ} \text{ άρα } \omega_{συστ}\approx 2,38r/s.$$

Για το σύστημα και την εφαρμογή της ΑΔΕ θα πάρουμε:

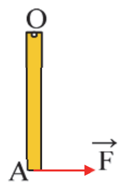
$$K_{συστ}=U_{W1}+U_{W2} \qquad \text{άρα}$$

$$½.I_{ολ}.\omega_{συστ}^2=M_1.g.\Delta h_1+M_2.g.\Delta h_2$$

με το $\Delta h=L/2-L_{συνθmax}/2$

Θα βρούμε $συνθ_{max}=0,13$.

Μεταβλητή ροπή σε ράβδο.



Μία κατακόρυφη ομογενής ράβδος ΟΑ έχει μήκος L=1m και μάζα M=4Kg μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της Ο. Η ράβδος αρχικά ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Κάποια στιγμή εφαρμόζουμε στο άκρο της ράβδου Α κάθετη στη ράβδο μεταβλητή δύναμη που η σχέση της είναι $F=100-160θ/π$ (S.I.) όπου θ η γωνία που διαγράφει η ράβδος σε σχέση με την αρχική της κατακόρυφη θέση. Η δύναμη καταργείται μόλις η ράβδος έχει διαγράψει γωνία 90^{o}. Να βρεθούν:

Α. Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου για το χρονική διάστημα που υπήρχε η δύναμη F.

Β. Θα καταφέρει η ράβδος να κάνει ανακύκλωση;

Γ. Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κατάργηση της δύναμης.

π=3,14

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Οι δυνάμεις που προκαλούν ροπή στην ράβδο είναι η F και το βάρος της ράβδου. Το μέτρο της ροπής της F συνεχώς μειώνεται εξαιτίας της σχέσης της ενώ το μέτρο της ροπής του βάρους αυξάνει μέχρι την οριζόντια θέση γιατί αυξάνει το απόστημα του βάρους. Για το χρονικό διάστημα όπου ισχύει η σχέση $τ_F>τ_W$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη στροφικά. Παρατηρώ ότι για

$$\theta=\pi/2 \quad \tau_F=(100-160\theta/\pi)L=20N.m$$

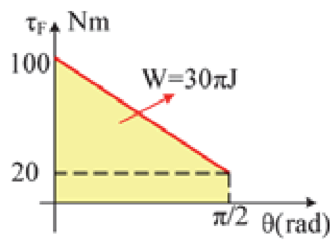
$$\text{ενώ } \tau_W=M.gL/2=20N.m.$$

Ετσι για οποιαδήποτε γωνία μικρότερη των 90^o η κίνηση της ράβδου ήταν επιταχυνόμενη στροφικά με όλο και μικρότερη γωνιακή επιτάχυνση σε σχέση με την γωνία διαγραφής.

Ετσι η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου θα συμβεί όταν η ράβδος φτάσει σε οριζόντια θέση γιατί εκεί η δύναμη καταργείται και η ροπή του βάρους από εκεί και μετά επιβραδύνει στροφικά την ράβδο. Η σχέση της ροπής της δύναμης θα είναι

$$\tau_F=F.L=100-160\theta/\pi \text{ (S.I.)}$$

Για να βρω την μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου θα εφαρμόσουμε ΑΔΕ για την κίνηση της ράβδου από την αρχική θέση στην οριζόντια θέση θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το σημείο Α αρχικά. Το έργο της ροπής της δύναμης θα το υπολογίσουμε από την γραφική παράσταση της ροπής της δύναμης με την γωνία διαγραφής θ.



Από την ΑΔΕ

$$W_{\tau}F + U_W = K_{max} + U_W'$$

Αρα $30\pi+4.10.0,5=K_{max}+4.10.1$ άρα $K_{max}=74,2J$

Β. Αν έκανε ανακύκλωση η ράβδος θα έφτανε στο ανώτερό της σημείο έχοντας κινητική ενέργεια. Αν υποθέσουμε ότι φτάνει θα έπρεπε να ισχύει η ΑΔΕ από την κατώτερη θέση στην ανώτερη θα έχουμε

$$W\tau_F + U_W = K_{\alpha\nu\omega\tau} + U_{W''} \quad \text{άρα}$$

$$30\pi + 4.10.0,5 = K_{\alpha\nu\omega\tau} + 4.10.1,5$$

$$\text{Αρα } K_{\alpha\nu\omega\tau} = 54,2J.$$

Εκτελεί λοιπόν ανακύκλωση η ράβδος αφού έχει κινητική ενέργεια στην ανώτερή της θέση.

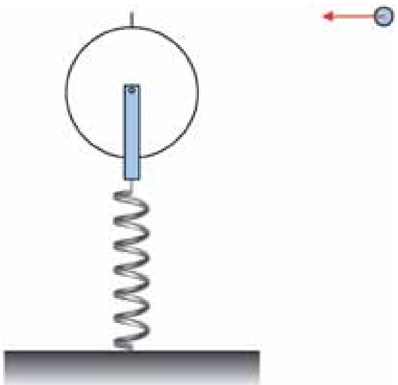
Γ. Την μέγιστη κινητική ενέργεια η ράβδος μετά την κατάργηση της δύναμης θα την έχει σε εκείνη τη θέση όπου η δυναμική της ενέργεια είναι ελάχιστη αφού δεν ενεργούν πλέον άλλες δυνάμεις που να παράγουν έργο εκτός του Βάρους. Η θέση αυτή θα είναι φυσικά η αρχική. Με εφαρμογή της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική θέση θα έχουμε

$$W_\tau F + UW = K_{max\tau\epsilon\lambda} + UW$$

$$\text{Άρα } K_{max\tau\epsilon\lambda} = 30\pi J.$$

Μια σύνθετη κίνηση με διατήρηση στροφορμής.

Κύλινδρος μάζας M=4Kg και ακτίνας R=0,5m ισορροπεί κατακόρυφος με την βοήθεια κατακόρυφου ελατηρίου. Ο κύλινδρος έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και στηρίζεται σε κατακόρυφο ελατήριο όπως στο σχήμα. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος.



Στο ανώτερο άκρο του κυλίνδρου υπάρχει κατακόρυφο αβαρές καρφί μικρού μήκους. Ανεβάζουμε τον κύλινδρο, ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό μήκος του και θέτουμε σε περιστροφή τον κύλινδρο δίνοντάς του γωνιακή ταχύτητα ω=30 rad/sec και ταυτόχρονα τον αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντωθεί. Έτσι το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί α.α.τ. ενώ ο κύλινδρος ταυτόχρονα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση αφού δεν υπάρχουν τριβές ανάμεσα στον άξονα περιστροφής και στον κύλινδρο. Όταν ο κύλινδρος έχει περιστραφεί κατά γωνία 6π rad το ελατήριο επανέρχεται για πρώτη φορά στην θέση φυσικού μήκους του. Εκείνη τη στιγμή ένα σημειακό βλήμα μάζας m=1kg που κινείται οριζόντια σφηνώνεται πάνω στο κατακόρυφο καρφί με αποτέλεσμα ο κύλινδρος και

το βλήμα να ακινητοποιηθούν στιγμιαία.
Να βρεθούν:

Α. Η σταθερά Κ του ελατηρίου
Β. Η οριζόντια ταχύτητα του βλήματος
Γ. Η απώλεια ενέργειας του συστήματος κατά την πλαστική κρούση
Δ. Το νέο πλάτος ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σύστημα κύλινδρος-βλήμα μετά την κρούση

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου δίνεται από την σχέση $I_{cm}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί α.α.τ. και για να επανέλθει στην αρχική του ακραία θέση θα χρειασθεί χρόνο μίας περιόδου. Στον ίδιο χρόνο ο κύλινδρος εκτελεί και ομαλή στροφική κίνηση. Ετσι $\theta=\omega\cdot T$ άρα $T=\pi/5$ sec. Από τον τύπο της περιόδου για την α.α.τ. θα έχουμε $T=2\pi\sqrt{M/K}$ άρα $K=400N/m$.
Β. Μετά την κρούση βλήματος και κυλίνδρου το σύστημα ακινητοποιείται στιγμιαία. Αρα η τελική του στροφορμή είναι 0. Με εφαρμογή της ΑΔΣ θα έχουμε $L_{αρχ}=L_{τελ}$ άρα $I.\omega\text{-}m\upsilon R=0$ άρα $\upsilon=30m/sec$.
Γ. Με εφαρμογή της ΑΔΕ για το σύστημα κυλίνδρου-βλήματος πριν και μετά την κρούση θα έχουμε

$$K_{\beta}+K_{κυλ}=Q_{απ} \quad 1/2m.U^2+1/2I\omega^2=Q_{απ}$$
$$Q_{απ}=675J$$

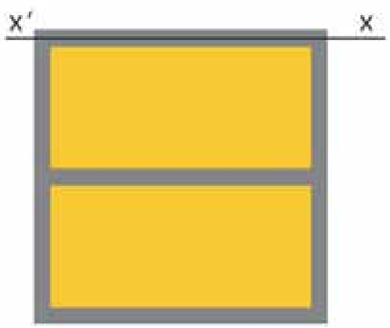
Δ. Μετά την κρούση του συστήματος θα αλλάξει η θέση ισορροπίας της α.α.τ. και θα μετακινηθεί λίγο πιο κάτω σε σχέση με την αρχική θέση ισορροπίας. Αυτό θα συμβεί γιατί έχουμε αύξηση της μάζας του συστήματος. Η νέα Θ.Ι.Τ. θα βρεθεί από την ισορροπία των δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα.

$F_{ελ}=W_{ολ}$ άρα $Kx_{ελ}=(M+m)g$ άρα $x_{ελ}=0{,}125m$.

Το σύστημα στην παραπάνω θέση δεν έχει ταχύτητα άρα βρίσκεται στην Θ.Μ.Α άρα το νέο πλάτος της ταλάντωσης του είναι Α=0,125m.

Αρχή διατήρησης στροφορμής και ανακύκλωση παραθύρου

Ένα ξύλινο παράθυρο αποτελείται από τέσσερις ράβδους μάζας M=3Kg η κάθε μία και σχηματίζοντας ένα τετράγωνο πλευράς L=1m. Μία πέμπτη όμοια οριζόντια ράβδος χωρίζει το τετράγωνο στην μέση. Το ξύλινο αυτό παράθυρο μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα xx΄ που διέρχεται από την πάνω οριζόντια ράβδο.



Ενας φυσικός συλλέκτης όπλων προσπαθεί να δοκιμάσει το καινούργιο του όπλο πυροβολώντας κατά «ριπάς» και οριζόντια εναντίον της κατώτερης οριζόντιας ράβδου. Παρατηρεί ότι όταν πυροβολεί 5 σφαίρες που σφηνώνονται στην κάτω οριζόντια ράβδο το παράθυρο μόλις και φτάνει σε γωνία 90^o σε σχέση με την αρχική του θέση κατακόρυφη θέση. Πόσες τουλάχιστον σφαίρες πρέπει να ρίξει για να μπορέσει το παράθυρο να κάνει ανακύκλωση γύρω από το άξονα xx΄.

Να θεωρηθεί ότι η σφαίρες κινούνται οριζόντια και σφηνώνονται ταυτόχρονα στην ράβδο και ότι η κάθε σφαίρα έχει μάζα m=0,05kg. Δίνεται για τη κάθε ράβδο που περιστρέφεται γύρω από το ένα της άκρο η ροπή αδράνειας της είναι $I_α=1/3ML^2$.

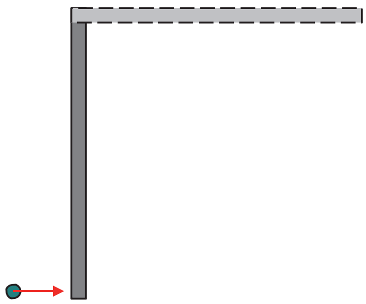
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το παράθυρο έχει συνολικά πέντε ράβδους από τις οποίες οι δύο κατακόρυφες έχουν ροπή αδράνειας $I_α=1/3.ML^2=1kg.m^2$. Η μία είναι πάνω στον άξονα xx΄ άρα δεν παρουσιάζει ροπή αδράνειας ενώ οι άλλες δύο οριζόντιες έχουν ροπές αδράνειας που θα βρεθούν με την βοήθεια του ορισμού της ροπής αδράνειας

$$I_2=M.L^2=3kg.m^2 \text{ και } I_3=M(L/2)^2=0,75kg.m^2.$$

Ετσι συνολικά το παράθυρο έχει $I_{ολ}=5,75kg.m^2$.

Κατά την ταυτόχρονη κρούση των 5 σφαιρών θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα σφαιρών και παράθυρου.



$$\mathbf{L}_{αρχ}=\mathbf{L}_{τελ}$$

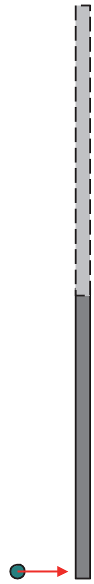
$$\text{άρα } 5m\cdot υ\cdot L=I_{ολ}\cdot ω_{συσ} \quad (1)$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του παράθυρου θα πάρουμε:

$$K_{συσ}=U_{συσ}$$

$$½\, I_{ολ}\cdot ω_{συσ}^2=5mgL+MgL/2+MgL/2+MgL/2+MgL$$

και θα προκύψει $ω_{συσ}=\sqrt{77,5/3}$rad/sec και με αντικατάσταση στην σχέση (1) θα βρεθεί η ταχύτητα του κάθε βλήματος $U=\sqrt{14496}\approx120,4$m/sec.



Για να κάνει ανακύκλωση τώρα το παράθυρο με τα βλήματα μαζί θα πρέπει το σύστημα να φτάσει στην ανώτερη του θέση έχοντας ουσιαστικά μηδενική γωνιακή ταχύτητα.

Αν λοιπόν εφαρμόσουμε και πάλι ΑΔΣ:

$$\mathbf{L}_{αρχ}=\mathbf{L}_{τελ}$$

$$\text{άρα } Nm\cdot υ\cdot L=I_{ολ}\cdot ω_{συσ'} \ (2)$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του παράθυρου θα πάρουμε:

$$K_{συσ}=U_{συσ} \quad \text{ή}$$

$$1/2 I_{ολ}.ω_{συσ}'^{2}=Nmg2L+MgL+MgL+MgL+Mg2L \ (3)$$

με αντικατάσταση της σχέσης (2) στην (3) θα καταλήξουμε στην δευτεροβάθμια εξίσωση:

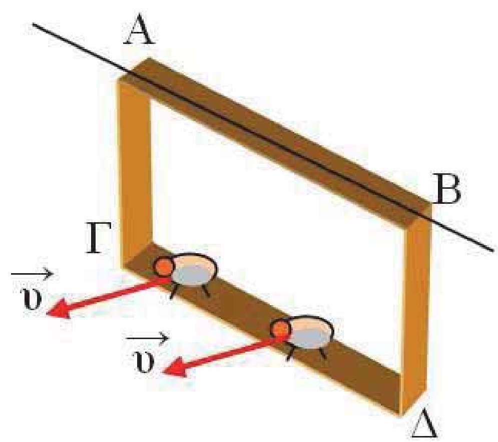
$$18{,}07N_2-13{,}25N-862{,}5=0$$

η οποία έχει λύση την $N\approx7{,}3$ βλήματα.

Αρα για να κάνει οπωσδήποτε ανακύκλωση το παράθυρο θα χρειαζόταν 8 τουλάχιστον βλήματα.

Αρχή διατήρησης της στροφορμής σε ένα τετράγωνο

Δύο πουλιά με ίδια μάζα m=0,05kg το καθένα που μπορούμε να τα θεωρήσουμε σημειακά κάθονται στις δύο άκρες μιας ράβδου ΓΔ. Η ράβδος ΓΔ αποτελεί την κατώτερη οριζόντια πλευρά κατακόρυφου τετραγώνου ΑΒΓΔ που μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα xx΄ ο οποίος ταυτίζεται με την πλευρά ΑΒ. Η κάθε ράβδος του τετραγώνου έχει μάζα M=0,3 Kg και μήκος L=0,1m. Ένας ξαφνικός θόρυβος τρομάζει τα πουλιά που φεύγουν ταυτόχρονα από τη ράβδο ΓΔ με οριζόντια ταχύτητα υ και κάθετα προς την ράβδο ΓΔ.



Α. Να βρεθεί η οριζόντια ταχύτητα υ του κάθε πουλιού αν είναι γνωστό ότι το τετράγωνο μόλις και εκτελεί ανακύκλωση γύρω από τον άξονα περιστροφής του.

Β. Να βρεθεί το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του τετραγώνου.

Γ. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος όταν ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι μέγιστος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας της ότι είναι $I_{cm}=1/12ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η ράβδος ΑΒ βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής χχ΄ άρα δεν παρουσιάζει ροπή αδράνειας. Οι κατακόρυφες ράβδοι ΑΔ και ΒΓ περιστρέφονται γύρω από τα άκρα τους Α και Β έτσι θα παρουσιάζουν ροπή αδράνειας που θα βρεθεί με την βοήθεια του κανόνα του Στάινερ:

$$I_{ΑΔ}=I_{ΒΓ}=I_{cm}+M(L/2)^2=1/3ML^2=0{,}001kg.m^2.$$

Όλα τα σημεία της ράβδου ΓΔ ισαπέχουν από τον άξονα χχ΄ και με την βοήθεια του ορισμού της ροπής αδράνειας θα βρούμε

$$I_{ΓΔ}=\Delta m_1.R_1^2+\Delta m_2R_2^2+\ldots..+\Delta m_nR_n^2=ML^2=0{,}003kg.m^2.$$

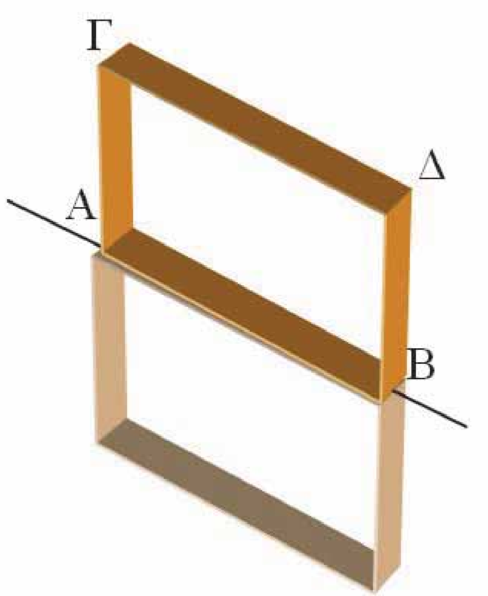
Αρα το $I_{ολxx΄}=0{,}005kg\cdot m^2$.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα πουλιά-πλαίσιο.

$$\mathbf{L}_{αρχ}=\mathbf{L}_{τελ}$$

άρα $\quad 0=2mυ\cdot L-I_{ολxx΄}\cdot ω_{αρχ}$ (1)

Το τετράγωνο μόλις και κάνει ανακύκλωση. Αυτό σημαίνει ότι μόλις η ράβδος ΓΔ φτάνει στο ανώτερο σημείο της έχοντας μηδενική γωνιακή ταχύτητα.



Αν εφαρμόσουμε ΑΔΕ για το ανέβασμα του τετραγώνου θεωρώντας το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το αρχικό επίπεδο όπου βρισκόταν η ράβδος ΓΔ.

$$K_{\alpha\rho} + U_{A\Delta} + U_{B\Gamma} + U_{AB} = U_{A\Delta}{}' + U_{B\Gamma}{}' + U_{AB} + U_{\Gamma\Delta}$$

$$1/2 I_{o\lambda xx'} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi}^2 + MgL/2 + MgL/2 + MgL = Mg3L/2 + Mg3L/2 + MgL + Mg2L$$

$$\text{Αρα } \omega_{\alpha\rho\chi} = \sqrt{480} \text{ r/sec.}$$

Από την (1) θα πάρουμε: $\upsilon = 2\sqrt{30}$m/sec.

Β. Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής συμβαίνει όταν τα αποστήματα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο πλαίσιο γίνουν μέγιστα. Αυτό συμβαίνει όταν όλο το ΑΒΓΔ βρίσκεται σε οριζόντια θέση δηλαδή όταν έχει στραφεί το τετράγωνο κατά γωνία 90^o σε σχέση με την αρχική του θέση. Αρα

$$\left| \Delta L/\Delta t \right|_{max} = M_{A\Delta} g.L/2 + M_{B\Gamma} g.L/2 + M_{\Delta\Gamma}.g.L = 0{,}6 \text{N.m.}$$

Γ. Για να βρω την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος στην παραπάνω θέση θα ξαναπάρω ΑΔΕ

$$K_{αρ} + U_{ΑΔ} + U_{ΒΓ} + U_{ΑΒ} = U_{ΑΔ}' + U_{ΒΓ}' + U_{ΑΒ} + U_{ΓΔ} + K_{τελ}$$

$$½\, I_{ολxx'} \cdot ω_{αρχ}^{2} + MgL/2 + MgL/2 + MgL = MgL + MgL + MgL + MgL + ½\, I_{ολxx'} \cdot ω_{τελ}^{2}$$

Μετά τις πράξεις το $ω_{τελ} = 4\sqrt{15}$ r/sec.

Τρύπα και κύλιση

Ομογενής σιδερένιος δίσκος έχει μάζα M=4kg και ακτίνα R=0,4m.

Ο Μπάρπα-Γιάννης ο σιδεράς θέλει να αφαιρέσει από τον δίσκο ένα άλλον ομόκεντρο δίσκο ακτίνας R/2 έτσι ώστε αν εφαρμόσει οριζόντια σταθερή δύναμη F=39N στο ανώτερο σημείου του κοίλου δίσκου ώστε αυτός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης μ>0,3.

Να βρεθούν:

A. Η ροπή αδράνειας του κοίλου δίσκου
B. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κοίλου δίσκου.
Γ. Σε ποια απόσταση από το κέντρο και πάνω στην κατακόρυφη διάμετρο του κοίλου δίσκου μπορεί να εφαρμοσθεί οποιαδήποτε οριζόντια σταθερή δύναμη έτσι ώστε ο κοίλος δίσκος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει είτε σε λείο οριζόντιο επίπεδο είτε σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο

$I_{cm}=0,5MR^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Αν I_1 είναι η ροπή αδράνειας του κοίλου δίσκου μπορεί να βρεθεί αν από την αρχική ροπή αδράνειας του συμπαγούς δίσκου αφαιρέσουμε την ροπή αδράνειας του δίσκου που αφαιρέθηκε από το συμπαγή δίσκο.

$$I_1=0,5MR^2-0,5M' R_1^2 \quad (1)$$

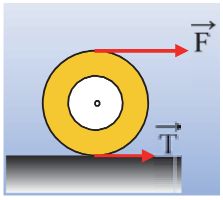
όπου Μ΄η μάζα που αφαιρέθηκε. Επειδή η πυκνότητα του δίσκου είναι σταθερή μιας και ο δίσκος είναι ομογενής μπορούμε να βρούμε την μάζα Μ΄από την σχέση με την πυκνότητα

$$M/V=M'/V' \text{ ή } M/d\pi R^2=M'/d\pi R_1^2$$

όπου d το πάχος του δίσκου άρα

$M'=MR_1^2/R^2=1Kg$ και με αντικατάσταση στην (1) θα βρούμε $I_1=0,3kgm^2$.

Β. Με τη βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα για την στροφική και μεταφορική κίνηση θα έχουμε:



$F+T=M_\Delta a$ (2)

$FR-TR=I_1\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (3)

$a=\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ (3) και μετά από πράξεις θα βρούμε $a=16m/s^2$

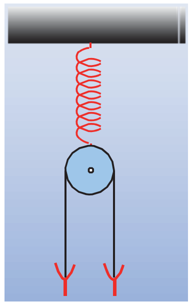
Γ. Για να μπορεί ο κοίλος δίσκος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και σε λείο και σε τραχύ επίπεδο θα πρέπει να μην ασκείται τριβή. Με βάσει τους νόμους τις κίνησης θα έχουμε:

$$F=M_\Delta a \ (4) \quad Fx=I_1a/R \ (5)$$

οπότε με διαίρεση κατά μέλη θα έχουμε $1/x=M_\Delta R/I_1$

και μετά από πράξεις x=0,25m.

Δύο διαπασών σε μια τροχαλία



Ομογενής τροχαλία έχει μάζα M=8kg και ακτίνα R= 0,5m μπορεί να ισορροπεί με την βοήθεια κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K=560N/m που είναι δεμένο στο κέντρο της τροχαλίας με το ένα άκρο του και το άλλο άκρο του είναι ακλόνητα συνδεδεμένο σε οροφή όπως στο παρακάτω σχήμα.

Δύο σημειακά διαπασών με μάζες m_1=4kg και m_2=2kg είναι δεμένα από αβαρές και μη εκτατό νήμα που είναι περασμένο από το αυλάκι της τροχαλίας και εκπέμπουν ήχους ίδιας συχνότητας f_s=1360Hz. Την στιγμή t=0 που το m_1 και το m_2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και απέχει από το έδαφος ύψος H=3,8m το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και τα δυο σώματα κινούνται ενώ το κέντρο μάζας της τροχαλίας παραμένει στη θέση του. Την στιγμή t=1sec κόβουμε ταυτόχρονα τα δύο νήματα με αποτέλεσμα τα δύο διαπασών να φτάσουν μετά από λίγο στο έδαφος και να καρφωθούν σε αυτό χωρίς να καταστραφούν.

Να βρεθούν:

Α. Η μέγιστη κινητική ενέργεια της τροχαλίας μετά το κόψιμο των νημάτων

Β. Τη μέγιστη και την ελάχιστη συχνότητα που θα μπορούσαν να ακούσουν δύο ακίνητοι παρατηρητές που θα βρισκόταν στο εδάφος και στην ίδια ευθεία με τα διαπασών σε όλη την διάρκεια της κίνησης των διαπασών.

Γ. Ο αριθμός των μεγίστων και των ελαχίστων έντασης ήχου που θα σχηματιστούν στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο διαπασών όταν αυτά βρεθούν στο έδαφος.

Δίνεται για την τροχαλία $I_{cm}=0{,}5MR^2$ και για τον ήχο $u_{ηχ}=340m/s$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την κίνηση των σωμάτων και με την βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα θα έχουμε

$$m_1g-T_1=m_1a \ (1) \quad T_2-m_2g=m_2a \ (1)$$

Για την τροχαλία θα έχουμε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση θα έχουμε

$$T_1R-T_2R=½\, MR^2α_{γων} \ (3)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις (1),(2) &(3) θα βρούμε μετά από τις πράξεις $a=2m/s^2$ $T_1=32N$ & $T_2=24N$

Για την ισορροπία της τροχαλίας θα έχουμε

$$Kx_1=Mg+T_1+T_2 \text{ άρα } x_1=136/560\ m$$

Μετά το κόψιμο των νημάτων η θέση ισορροπίας της τροχαλίας σε σχέση με το φυσικό μήκος του ελατηρίου θα δίνεται από την σχέση $Kx_2=Mg$ άρα $x_2=80/560m$

Αρα το πλάτος της ταλάντωσης του κέντρου μάζας της τροχαλίας θα είναι $A=x_2-x_1=0{,}1m$

Η τροχαλία μετά το κόψιμο των δύο σκοινιών δέχεται μόνο την κατακόρυφη δύναμη του ελατηρίου αλλά και το βάρος της. Και οι δύο δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο της τροχαλίας άρα δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή. Ετσι η τροχαλία εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας της αλλά και το κέντρο μάζας της τροχαλίας εκτελεί Γ.Α.Τ. με πλάτος Α.Η σταθερή γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι $\omega_{max}=\alpha_{\gamma\omega\nu}t=4r/s$.

$$K_{o\lambda max}= ½\, KA^2 + ½\, I\omega_{max}^2=10{,}8J$$

Β. Την στιγμή που κόβεται το κάθε νήμα το κάθε διαπασών έχει ταχύτητα μέτρου u=at=2m/s και έχουν διανύσει διάστημα $h_1=1/2at^2=1m$. Τομικρό σώμα ανεβαίνει ενώ το μεγάλο κατεβαίνει. Εχουμε δύο ακίνητους παρατηρητές και δύο πηγές ηχητικών κυμάτων άρα η συχνότητα που ακούει ο κάθε παρατηρητής θα δίνεται από τη σχέση

$$f_s = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} \pm \upsilon} f_s \quad (4)$$

η μέγιστη συχνότητα που θα ακούσει ο παρατηρητής θα είναι όταν η πηγή πλησιάζει με την μεγαλύτερη ταχύτητα και η ελάχιστη συχνότητα που θα αντιληφθεί ο παρατηρητής θα συμβεί όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή . Η μέγιστη ταχύτητα απομάκρυνσης από τους παρατηρητές είναι η u=2m/s γιατί το σώμα μάζας m_2 αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος θα εκτελέσει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω και έτσι η

$$F_{min}=340.1340/342=1352Hz.$$

Η μέγιστη συχνότητα που θα αντιληφθεί ο παρατηρητής θα είναι όταν το σώμα μάζας m_2θα φτάσει στο έδαφος. Με τη βοήθεια της

ΑΔΕ για το σώμα m_2 και αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος θα έχουμε

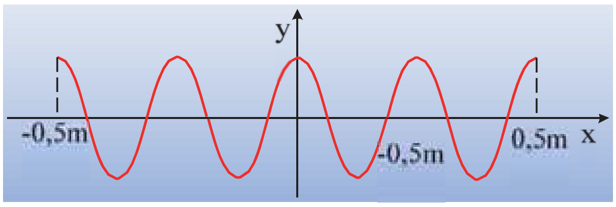
$$m_2g(H+h_1)+½\, m_2u^2= ½\, m_2u^2_{max2}$$

θα βρούμε μετά τις πράξεις u_{2max}=10m/s

Με αντικατάσταση της μέγιστης ταχύτητας στην σχέση (4) θα έχουμε f_{max}=340.1360/330=1401,2Hz.

Μετά το κάρφωμα και των δύο διαπασών στο έδαφος τα δύο διαπασών λειτουργούν σαν πηγές κύματος με σταθερό μήκος κύματος $\lambda=u_{\eta\chi}/f_s$=0,25m.

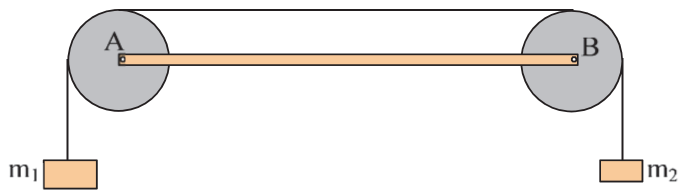
Πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο διαπασών, που θα απέχουν μεταξύ τους απόσταση 2R=1m,θα σχηματιστεί στάσιμο κύμα η μορφή του οποίου θα είναι όπως στο παρακάτω σχήμα



Ετσι στο ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα στα δύο διαπασών θα υπάρχουν 8 σημεία απόσβεσης και 7 σημεία ενίσχυσης.

Δύο τροχαλίες και μια ράβδος.

Η παρακάτω ράβδος ΑΓ του σχήματος είναι αβαρής και έχει μήκος L=1m, την συγκρατούμε σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια εξωτερικών δυνάμεων. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο καρφί σε θέση Ο. Στο κάθε άκρο Α και Γ της ράβδου πριτσινώνουμε (Βαγγέλη



είναι όρος των σιδεράδων) δύο τροχαλίες μάζας M_1=4Kg και M_2=2Kg με ίδιες ακτίνες R_1=R_2=10cm που μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από δύο οριζόντιους άξονες και παράλληλους με τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο.

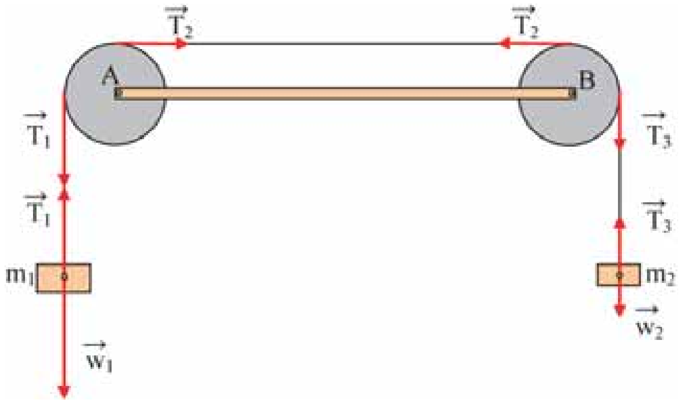
Με τη βοήθεια αβαρούς νήματος δένουμε δύο σώματα με μάζες m_1=4Kg και m_2=3Kg που την στιγμή t=0 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Την στιγμή t=0 αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο καταργώντας τις εξωτερικές δυνάμεις και παρατηρούμε ότι η ράβδος συνεχίζει να παραμένει οριζόντια ενώ το σύστημα των δύο μαζών αρχίζει να κινείται έτσι ώστε το σώμα μάζας m1 να αρχίζει να κατέρχεται. Να υπολογιστούν:

Α. Ποια η απόσταση ΑΟ

Β. Ποια η απόσταση των δύο μαζών σε συνάρτηση με το χρόνο αν οι μάζες θεωρηθούν σημειακές

$I_{cm}=0,5MR^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α. Για την κίνηση του σώματος μάζας m_1

$$m_1g\text{-}T_1=m_1a \ (1)$$

Για την κίνηση της τροχαλίας $T_1.R_1\text{-}T_2.R_1=0{,}5.M_1.R_1^2.\alpha_{\gamma\omega\nu}$ άρα

$$T_1\text{-}T_2=0{,}5.M_2.a \ \ (2)$$

Για την κίνηση του σώματος μάζας m_2

$$T_3\text{-}m_2g=m_2a \ (3)$$

Για την κίνηση της τροχαλίας $T_2.R_1\text{-}T_3.R_1=0{,}5.M_2.R_1^2.\alpha_{\gamma\omega\nu}$ άρα

$$T_2\text{-}T_3=0{,}5.M_2.a \ \ (4)$$

Από (1),(2),(3) και (4) θα βρούμε

$$a=1m/sec^2 \text{ και } T_1=36N \ \ T_2=34N \ \ T_3=33N$$

Για την ισορροπία της πρώτης τροχαλίας θα ισχύει

$$N_1=M_1.g+T_1 \ (5) \text{ άρα } N_1=76N$$

Για την ισορροπία της δεύτερης τροχαλίας θα ισχύει

$$N_2=M_2.g + T_3 \ (6) \text{ άρα } N_2=53N$$

Όπου N_1 και N_2 οι κατακόρυφες συνιστώσες των δυνάμεων που ασκεί η ράβδος στις τροχαλίες.

Για την ισορροπία της ράβδου Στ(ο)=0 άρα

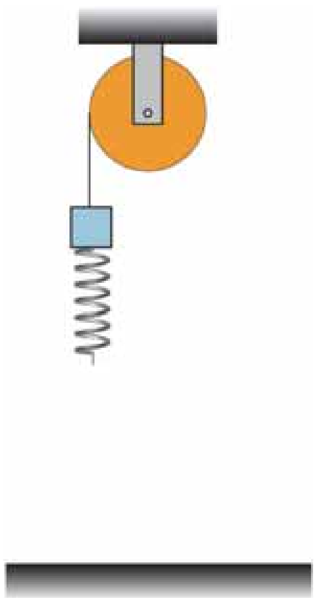
$$N_1.(AO) - N_2(L\text{-}AO) = 0 \ (7) \text{ άρα } AO=53/129m$$

B. Η απόσταση των δύο σημειακών μαζών θα δοθεί με τη βοήθεια του Π.Θ.

$$D=\{(L+2R_1)^2+(2H)^2\}^{1/2}=\{1,44+2.t^2)^{1/2} \ (S.I)$$

Το σώμα κρέμεται από μια τροχαλία έχοντας και ένα ελατήριο

Σώμα μάζας m=1 kg που έχει στερεωμένο στο κάτω μέρος του αβαρές ελατήριο σταθεράς K=75 N/m και φυσικού μήκους l_o=0,5m αφήνεται ελεύθερο από ύψος H=1,5m πάνω από το έδαφος. Το πάνω μέρος του σώματος είναι δεμένο με αβαρές μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους που είναι τυλιγμένο σε μία τροχαλία μάζας M=8Kg.



Στο κάτω μέρος του ελατηρίου υπάρχει καρφί που μόλις έρθει σε επαφή με το έδαφος στερεώνει το ελατήριο στο έδαφος και το διατηρεί κατακόρυφο χωρίς απώλειες ενέργειας.

Την στιγμή που το ελατήριο κολλάει στο έδαφος το νήμα κόβεται.

A. Να βρεθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια της τροχαλίας

Β. Να βρεθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος m.

Γ. Να γραφεί η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος από την θέση ισορροπίας θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω.

Δ. Να βρεθεί η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

Δίνεται για την τροχαλία το $I_{cm}=0.5M.R^2$.

Δίνεται το $g=10m/sec^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την κίνηση του σώματος m και της τροχαλίας θα έχουμε από τους νόμους του Νεύτωνα

$$m.g-T=m.a \quad (1) \text{ και } T.R=0{,}5M.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu} \ (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα βρούμε $a=2m/sec^2$.

Η κίνηση του σώματος m είναι ομαλά επιταχυνόμενη μέχρι την στιγμή που το ελατήριο θα ακουμπήσει στο έδαφος. Εκείνη την στιγμή η τροχαλία θα έχει την μέγιστη κινητική της ενέργεια γιατί εκείνη την στιγμή το νήμα κόβεται άρα η τάση του νήματος καταργείται.

Από το νόμο του διαστήματος για την επιταχυνόμενη κίνηση θα πάρουμε:

$$H-l_o=½.a.t^2 \text{ θα βρούμε } t=1sec.$$

$$\text{Η } K_{\tau\rho}=½.I\omega^2=½..0{,}5.M.R^2.\omega^2=1/4\,.M.(at)^2=8J.$$

Β. Μετά την επαφή του ελατηρίου με το έδαφος το σώμα θα εκτελέσει α.α.τ γύρω από την θέση ισορροπίας για την οποία θα ισχύει

$F_{ελ}=m.g$ άρα $K.x_{ελ}=m.g$ άρα $x_{ελ}=2/15m$.

Το σώμα την στιγμή της επαφής με το έδαφος έχει ταχύτητα

$$υ=a.t=2m/sec.$$

Μετά την έναρξη της α.α.τ. θα εφαρμόσουμε ΑΔΕΤ για την ταλάντωση

$$½.Kx_{ελ}^2 + ½.m.U^2 =½.K.A^2$$

$$\text{άρα } A=4/15m \quad ω=\sqrt{K/m}=5\sqrt{3}rad/sec.$$

$$\text{Αρα } U_{max}=ω.A=4\sqrt{3}/3m/sec \quad \text{άρα } K_{max}=8/3\ J$$

Γ. Αν υποθέσουμε ότι την στιγμή t=0 ξεκινάει η α.α.τ. με την επαφή του ελατηρίου στο έδαφος από την εξίσωση απομάκρυνσης θα έχουμε

$$2/15=4/15ημ(ω.0+φ_o) \text{ άρα } ημφ_o=½ \text{ άρα } φ_o=5π/6$$

επειδή η ταχύτητα του σώματος είναι αρνητική την στιγμή t=0.
΄Ετσι η εξίσωση θα έχει την μορφή :

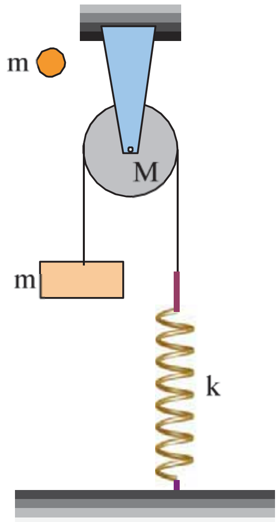
$$ψ=4/15\ ημ(5\sqrt{3}.t+5π/6)\ (S.I.)$$

Δ. Το σώμα θα σταματήσει στιγμιαία στη ΘΕΑ άρα το ελατήριο θα έχει συσπειρωθεί συνολικά κατά $x_{ελmax}=A+x_{ελ}=6/15=0,4m$.
Το ίδιο θα μπορούσε να προκύψει με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική κατάσταση

$$m.g\ (H-l_o+x_{ελmax})=K_{τρ}+½.K.x_{ελmax}^2 \text{ άρα } x_{ελmax}=0,4m.$$

Τροχαλία και ελατήριο

Τροχαλία μάζας M=4Kg και ακτίνας R=0,5m ισορροπεί όπως στο παρακάτω σχήμα την βοήθεια ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K=100N/m που συνδέεται με μη εκτατό σχοινί με σώμα μάζας m=1Kg.



Από ύψος H=0,8m πάνω στην ίδια κατακόρυφο με το σώμα m αφήνουμε δεύτερο σώμα επίσης μάζας m που συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m. Να βρεθούν:

A. Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου
B. Η μέγιστη ταχύτητα του συστήματος 2m κατά την κάθοδό του.

Το $I_{cm}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Για την πτώση του σώματος και από την ΑΔΕ θα έχουμε:

$$M\cdot g\cdot H=1/2\, m\cdot\upsilon^2 \qquad \text{άρα } \upsilon=4\text{m/sec.}$$

Για την κρούση των σωμάτων θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ:

$$L_{αρχ}=L_{τελ}$$

$$\text{άρα } m\cdot\upsilon\cdot R=I\omega+2m\cdot\upsilon' R \ \text{ άρα } \upsilon'=1\text{m/sec.}$$

Αρχικά το σύστημα ισορροπούσε με:

$$T=m.g \ \text{ και } T=F_{ελ} \qquad \text{άρα } x_{ελαρ}=0{,}1\text{m.}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ και μέχρι να σταματήσει το σύστημα να κινείται θα πάρουμε

$$½\cdot 2m\cdot\upsilon'^2+½\, I\cdot\omega^2+2mgX_{max}+½Kx_{αρχ}^2=½K(X_{max}+x_{αρχ})^2$$

$$\text{Άρα } x_{max}\approx 0{,}32\text{m. Αρα } X_{ελmax}\approx 0{,}42\text{m.}$$

B. Μετά την κρούση για τις κινήσεις των σωμάτων και της τροχαλίας θα πάρουμε από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση

$$2mg-T_1=2ma \quad (1)$$

$$T_1\cdot R-T_2\cdot R=0{,}5MR^2\cdot\alpha_{γων} \ (2)$$

$$T_2=F_{ελ}=K(x+x_{ελαρχ}) \ (3)$$

Από τις (1),(2) και (3) θα πάρουμε $\alpha=2{,}5-25x$ (S.I.) όπου x το διάστημα που διανύει το σύστημα 2m.

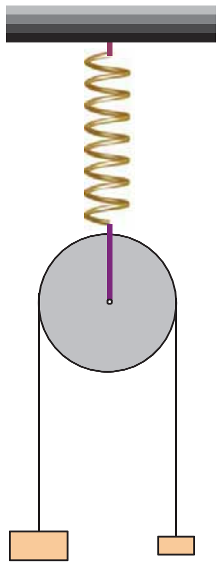
Παρατηρώ ότι η επιτάχυνση των σωμάτων μειώνεται και κάποια στιγμή θα γίνει αρνητική.Οταν το σώμα έχει $\alpha>0$ επιταχύνει και όταν έχει $\alpha<0$ επιβραδύνει. Ετσι την μέγιστη ταχύτητα θα την έχει το σύστημα όταν α=0 άρα στην θέση x=0,1m.

Εφαρμόζοντας ΑΔΕ για το σύστημα σωμάτων θα έχουμε:

$$\tfrac{1}{2}\,2m\cdot\upsilon'^2 + 2mg\cdot x + \tfrac{1}{2}\,I\cdot\omega^2 + \tfrac{1}{2}\,Kx_{\alpha\rho\chi}^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 2m\cdot\upsilon_{max}^2 + \tfrac{1}{2}\,I\omega_{max}^2 + \tfrac{1}{2}\,K(x+x\varepsilon\lambda)^2$$

$\upsilon_{max}=\sqrt{5}/2$ m/sec.

Μια τροχαλία ένα ελατήριο και δυο σώματα να κινούνται.



Ομογενής τροχαλία έχει μάζα M=8kg και ακτίνα R=0,5m μπορεί να ισορροπεί με τη βοήθεια κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K=1360N/m που είναι δεμένο στο κέντρο της τροχαλίας με το ένα άκρο του και το άλλο άκρο του είναι ακλόνητα συνδεδεμένο σε οροφή όπως στο παρακάτω σχήμα. Δύο σώματα με μάζες m_1=4kg και m_2=2kg είναι δεμένα από αβαρές και μη εκτατό νήμα που είναι περασμένο από το αυλάκι της τροχαλίας. Την στιγμή t=0 που το m_1 και το m_2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και τα δυο σώματα κινούνται ενώ η τροχαλία παραμένει στη θέση της.

Να βρεθούν:

Α. Η επιμήκυνση του ελατηρίου

Β. Η συνάρτηση της απόστασης των δύο σωμάτων m_1 και m_2 με το χρόνο αν τα σώματα θεωρηθούν σημειακά

Γ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος όταν η απόσταση των σωμάτων γίνει $D=\sqrt{5}$m.

Δ. Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I_{cm}=0{,}5M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την ισορροπία της τροχαλίας στον κατακόρυφο άξονα ισχύει

$$\Sigma F_{\psi}=0 \text{ άρα } F_{\varepsilon\lambda}=M.g+T_1+T_2 \ (1)$$

Για τα σώματα m_1 και m_2 ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση θα μας δώσει:

$$m_1.g-T_1=m_1.\alpha \ (2) \qquad T_2-m_2.g=m_2.\alpha \ (3)$$

Αν για την τροχαλία εφαρμόσουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την στροφική κίνηση θα έχουμε

$$T_1R-T_2.R=0{,}5M\cdot R^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_1-T_2=0{,}5M\alpha \ (4)$$

Με λύση του παραπάνω συστήματος θα έχουμε $\alpha=2m/sec^2$

$T_1=32N$ και $T_2=24N$ από την (1) $1360x_{\varepsilon\lambda}=80+32+24$ άρα $x_{\varepsilon\lambda}=0{,}1m$.

Β. Η απόσταση των δύο σωμάτων θα βρεθεί με την βοήθεια Π.Θ. και θα δίνεται από την σχέση $D=\sqrt{(2R)^2+(2H)^2}$ όπου Η η κατακόρυφη απόσταση που διανύει το κάθε σημειακό σώμα το m_1 προς τα κάτω και το m_2 προς τα κάτω. Η κίνηση όμως των σωμάτων m_1 και m_2 είναι ομαλά επιταχυνόμενη άρα $H=1/2\ \alpha.t^2=t^2$ (S.I)

$$\text{Ετσι το } D=\sqrt{1+4t^4} \text{ (S.I.)}$$

Γ. Με βάση την παραπάνω σχέση θα έχω $\sqrt{5}=\sqrt{1+4t^4}$ άρα t=1sec.

Στον παραπάνω χρόνο το κάθε σώμα έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση $H=1/2\alpha t^2=1m$.

Με βάση την ΑΔΕ για το σύστημα θα έχουμε:

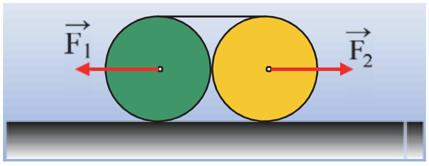
$$U_{m_1}=K_{συστ}+U_{m_2} \text{ άρα } K_{συστ}=20J$$

Δ. Το $\Delta L/\Delta t|_{ολ}$ δίνεται από την σχέση:

$\Delta L/\Delta t|_{ολ}=\Sigma\tau_{εξωτερικών\ δυνάμεων}= m_1.g.R-m_2.g.R=10N.m$

Δύο δίσκοι που πήραν ανάποδες στροφές και επανήλθαν μετά την επιστράτευση.

Δύο ομογενείς δίσκου μάζας M_1=2kg και M_2=1kg έχουν ίδια ακτίνα R=0,2m και έχουν περασμένο σε ένα λεπτό αυλάκι αβαρές μη εκτατό νήμα που μπορεί να ξετυλίγεται χωρίς τριβές. Οι δίσκοι είναι σε επαφή και το νήμα είναι οριζόντιο στην πάνω μεριά των δίσκων όπως στο παρακάτω σχήμα



Την χρονική στιγμή t=0 ασκώ στο κέντρο του κάθε δίσκου σταθερή δύναμη F_1=10N και F_2=3,5N αντίστοιχα έτσι ώστε το ανώτερο σημείο του κάθε δίσκου να είναι συνεχώς ακίνητο και το νήμα να ξετυλίγεται. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο κάθε δίσκο και στο έδαφος είναι μ=0,1 να βρεθούν:

Α. Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κάθε δίσκου

Β. Το ποσοστό του έργο των δύο δυνάμεων που έχει μετατραπεί σε θερμότητα λόγω τριβής μετά από χρόνο t=1s για όλο το σύστημα

Αν την χρονική στιγμή t=1s νήμα κοπεί και καταργηθούν ταυτόχρονα οι δυνάμεις F_1 και F_2 να βρεθούν:

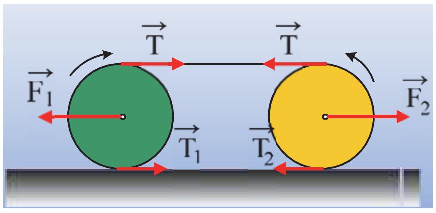
Γ. Ποια χρονική στιγμή μετά το κόψιμο του νήματος θα πάψει η τριβή να προσφέρει ενέργεια στο περιβάλλον

Δ. Ποιες οι τελικές ταχύτητες των κέντρων μάζας του κάθε δίσκου.

$I_{cm}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Επειδή το ανώτερο σημείο του κάθε κάθε δίσκου παραμένει ακίνητο το χαμηλότερο σημείο του κάθε δίσκου έχει ταχύτητα διπλάσια του κέντρου μάζας και με φορά προς την φορά κίνησης του κάθε δίσκου. Ετσι σε κάθε δίσκο θα ασκείται τριβή ολίσθησης με φορά αντίθετη της ταχύτητας του χαμηλότερου σημείου του δίσκου. Από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε και με βάση το σχήμα



$$F_1-T-\mu M_1 g=M_1 a_1 \quad (1)$$

$$F_2-T-\mu M_2 g=M_2 a_2 \quad (2)$$

$$TR-T_1R=½\, M_1R^2\alpha_{\gamma\omega\nu1} \quad ή \quad T-\mu M_1 g=½\, M_1 a_1 \quad (3)$$

$$TR-T_2R=½\, M_2R^2\alpha_{\gamma\omega\nu2} \quad ή \quad T-\mu M_2 g=½\, M_2 a_2 \quad (4)$$

Μετά την επίλυση των εξισώσεων (1) και (3) θα βρούμε $a_1=2m/s_2$

Μετά την επίλυση των εξισώσεων (2) και (4) θα βρούμε $a_2=1m/s2$

Β. Η κίνηση του κέντρου μάζας είναι επιταχυνόμενη με το διάστημα του κέντρου μάζας του κάθε δίσκου

$S=½\, a_{cm}t^2$ και για τον κάθε δίσκο θα είναι $S_1=1m$ & $S_2=0{,}5m$

Το έργο της κάθε δύναμης θα δίνεται από τη σχέση

$$W_1=F_1S_1=10J \quad \& \quad W_2=F_2S_2=1{,}75J$$

Η θερμότητα είναι το έργο της τριβής για κάθε δίσκο και θα δίνεται από τη σχέση

$$Q_1=T_1s_1+T_1R\theta=2T_1S_1=4J \ \&$$
$$Q_2=T_2S_2+T_2R\theta=2T_2S_2=1J$$

Ετσι το ποσοστό του έργο των δυνάμεων που έγινε θερμότητα είναι:

$$\Pi=Q_{ολ}.100\%/W_{ολ}=42{,}55\%$$

Γ. Μετά το κόψιμο του νήματος το η τριβή ολίσθησης θα επιβραδύνει την στροφική κίνηση αλλά και την μεταφορική και θα πάψει να προσφέρει ενέργεια στο περιβάλλον την στιγμή που θα αρχίσει η καθαρή κύλιση δηλαδή όταν το χαμηλότερο σημείο του κάθε δίσκου αποκτήσει μηδενική ταχύτητα. Από τους νόμους και πάλι του Νεύτωνα για την κάθε κίνηση ξεχωριστά θα έχουμε

$$\mu M_1g=M_1\alpha_1 \ \text{άρα}\ \alpha_1=1m/s^2 \ \&$$
$$\mu M_1gR=1/2M_1R^2\alpha_{γων1}\ \text{άρα}\ \alpha_{γων1}=10r/s^2$$
$$\mu M_2g=M_2\alpha_2 \ \text{άρα}\ \alpha_2=1m/s_2 \ \&$$
$$\mu M_2gR=1/2M_2R^2\alpha_{γων2}\ \text{άρα}\ \alpha_{γων2}=10r/s^2$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του καθενός δίσκου την στιγμή που κόβεται το νήμα ήταν

$$u_{cm1}=a_1t=2m/s \ \ \& \ u_{cm2}=a_2t=1m/s$$

και τα μέτρα της γωνιακής ταχύτητας του καθενός δίσκου ήταν

$$\omega_1=u_{cm}1/R=10r/s \ \ \& \ \omega_2=u_{cm2}/R=5r/s$$

Ετσι

$$u_{cm1}\text{-}α_1 t_1=(-ω_1+α_{γων1}t_1)R$$

και μετά από πράξεις θα βρούμε t_1=4/3s για τον πρώτο δίσκο ενώ για τον δεύτερο δίσκο θα έχουμε

$$υ_{cm2}\text{-}α_2 t_2=(-ω_2 +α_{γων2}t_2)R$$

και μετά από πράξεις θα βρούμε t_2=2/3s

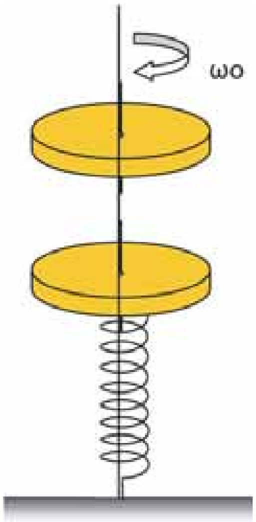
Δ. Οι τελικές ταχύτητες των κέντρων μάζας θα είναι μόλις αποκτήσουν την καθαρή κύλιση μιας και μετά από εκεί οι δίσκοι θα εκτελούν ομαλή στροφική και μεταφορική κίνηση

$$υ_{τελ1}= u_{cm1}\text{-}α_1 t_1=2\text{-}1\cdot 4/3=2/3 \text{ m/s} \ \&$$

$$υ_{τελ2}= u_{cm2}\text{-}α_2 t_2=1\text{-}1\cdot 2/3=1/3 \text{ m/s}.$$

Κρούση περιστρεφόμενων δίσκων και ΑΑΤ

Δίσκος μάζας M_1=7kg και ακτίνας R=0,5m μπορεί να περιστέφεται οριζόντια χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα. Ο δίσκος ισορροπεί οριζόντιος με την βοήθεια κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου που ο άξονας του ελατηρίου συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής. Το ελατήριο είναι αρχικά συσπειρωμένο κατά 0,7m.



Δεύτερος οριζόντιος δίσκος ίδιας ακτίνας με τον πρώτο αλλά με μάζα M_2=1Kg μπορεί να περιστέφεται οριζόντια γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα. Δίνουμε ακαριαία αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0=8 r/sec και αφήνουμε το δίσκο ελεύθερο να κινηθεί μόνο με την επίδραση του βάρους του. Την στιγμή που ο δεύτερος δίσκος έχει εκτελέσει γωνιακή μετατόπιση θ=6,4rad συγκρούεται με τον ακίνητο δίσκο που είναι δεμένος στο ελατήριο αλλά μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής .Μετά από λίγο το σύστημα λειτουργεί σαν ένας ενιαίος δίσκος. Να βρεθούν:

Α. Το ύψος από όπου αφέθηκε ο δεύτερος δίσκος

Β. Η κοινή γωνιακή ταχύτητα του συστήματος των δύο δίσκων και το πλάτος της κατακόρυφης ταλάντωσης των δύο δίσκων

Γ. Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο δίσκων.

Δ. Η απώλεια ενέργειας εξαιτίας της πλαστικής κρούσης.

Δίνονται για τον δίσκο $I_{cm}=0,5M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Ο δίσκος κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του. Εκτελεί ταυτόχρονα και ελεύθερη πτώση αλλά ομαλή στροφική κίνηση μιας και δεν υπάρχει εξωτερική ροπή που να επηρεάζει την στροφική κίνηση του δίσκου. Από την σχέση της γωνιακής μετατόπισης στην ομαλή στροφική $\theta=\omega_o.t$ θα βρούμε t=0,8sec.

Από τον νόμο του διαστήματος για την ελεύθερη πτώση

$$H=½.g.t^2=3,2m.$$

Β. Για την πλαστική κρούση των δύο δίσκων θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ

$$L_{αρχ}=L_{τελ} \quad \text{άρα} \quad I_2.\omega_o=(I_1+I_2)\omega_{συστ} \text{άρα } \omega_{συστ}=1r/sec.$$

Από την ισορροπία του δίσκου $K.x_1=M_1.g$ άρα K=100N/m

Ο δίσκος $Δ_2$ που πέφτει έχει κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου

$$U=g.t=8m/sec$$

Με την βοήθεια της ΑΔΟ για την πλαστική κρούση

$$M_2.U=(M_1+M_2).U_{συστ} \quad \text{άρα } U_{συστ}=1m/sec$$

Με την αλλαγή της μάζας θα έχουμε και αλλαγή της ΘΙΤ

Για την ισορροπία στην Ν.Θ.Ι.Τ $(M_1+M_2).g=K.x_2$ άρα $x_2=0,8m$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για την κατακόρυφη ταλάντωση του συστήματος θα έχουμε

$$½.(M_1+M_2).U_{συστ}+½.K(x_2-x_1) =½.K.A$$

άρα μετά από πράξεις A=0,3m.

Γ. Οι δίσκοι εκτελούν κατακόρυφη Γ.Α.Τ. και ταυτόχρονα ομαλή στροφική κίνηση γύρω από τον κατακόρυφο άξονα περιστοφής. Ετσι η μέγιστη κινητική τους ενέργεια θα δίνεται από την σχέση

$K_{ολmax}=K_{maxταλ}+K_{περ}=½.K.A^2+½.I_{ολ}.ω_{συστ}$ μετά από πράξεις

$$K_{ολmax}=5J$$

Δ. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική κατάσταση πριν και μετά την κρούση θα έχουμε

$U_w+K_{περ1}=K_{περσυστ}+K_{μετ}+Q$ άρα

$$M_2.g.H + ½.I_2.ω_o^2= ½.I_{ολ}.ω_{συσ}^2+½.M_{ολ}.U_{συσ}^2+Q$$

μετά από πράξεις θα βρεθεί

$$Q=31,5J$$

Doppler και κρούση

Στο παρακάτω σχήμα το ελατήριο έχει σταθερά $K=\pi^2 N/m$ το σώμα μάζας $m_1=1kg$ είναι ακίνητο και δεμένο στο ελατήριο και έχει προσαρμοσμένο πάνω του ανιχνευτή ήχων. Το σύστημα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Σε απόσταση D=340m από το σώμα m_1 υπάρχει δεύτερο σώμα μάζας $m_2=1kg$ που το εκτοξεύουμε με αρχική ταχύτητα u=10m/sec την στιγμή t=0. Στην ίδια θέση με το σώμα m_2 υπάρχει ακίνητη πηγή που μπορεί να παράγει αρμονικούς ήχους συχνότητας Fs=680Hz και τίθεται σε λειτουργία την στιγμή t=0. Το σώμα m_2 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το m_1 και κάποια στιγμή επιστρέφει στην πηγή. Τότε σταματάει η πηγή να εκπέμπει ήχους. Να βρεθούν:

A. Ποια χρονική στιγμή θα επιστέψει το m_2 στην πηγή των ηχητικών κυμάτων;
B. Να δοθεί η γραφική παράσταση της συχνότητας που καταγράφει ο ανιχνευτής σε συνάρτηση με τον χρόνο. Τι εκφράζει το περιεκλειόμενο εμβαδόν; Μπορεί να υπολογιστεί;

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου $u_{ηχ}$=340m/sec.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να φτάσει το σώμα m_2 στο σώμα m_1 θα χρειασθεί χρόνος t_1=D/u=34sec. Η κρούση είναι ελαστική άρα τα δύο σώματα θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Το σώμα m_1 θα εκτελέσει γ.α.τ μέχρι να ξαναβρεθεί στην ΘΙΤ και να ξαναχτυπήσει το σώμα m_2 για να γίνει και πάλι η ανταλλαγή ταχυτήτων.

Η διάρκεια της ταλάντωσης του m_1 είναι t_2=T/2=1sec.

Η επιστροφή του σώματος m_2 θα διαρκέσει και πάλι t_1.

Αρα η επιστροφή του σώματος m_2 στην πηγή θα γίνει την χρονική στιγμή $t_{ολ}=2t_1+T/2$=69sec.

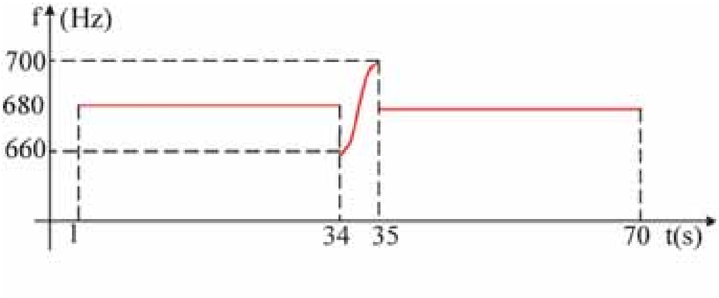
Β. Για να φτάσει ο ήχος από την πηγή στον ανιχνευτή θα χρειασθεί αρχικό χρονικό διάστημα $\Delta t=D/u_{ηχ}$=1sec. Μέχρι την στιγμή που έγινε η πρώτη κρούση ο ανιχνευτής ήταν ακίνητος. Ετσι η συχνότητα που κατέγραφε ήταν αυτή της πηγής F=680Hz. Μετά την πρώτη κρούση και μέχρι να γίνει η δεύτερη ο ανιχνευτής εκτελούσε γ.α.τ. με ταχύτητα που θα δινόταν από την εξίσωση U=u.συνω.t΄ όπου t΄=(t-34)sec. Εχουμε θεωρήσει θετική φορά προς τα δεξιά και το $\omega=\sqrt{K/m_1}=\pi$ r/s.

Ετσι η συχνότητα που καταγράφει θα δίνεται από την σχέση:

F=(340-10συνπt΄)680/340=680-20συνπt΄ 0 < t΄< 1sec (S.I.).

Μετά την δεύτερη κρούση ο ανιχνευτής καταγράφει και πάλι την ίδια συχνότητα με αυτήν της πηγής αφού σταματάει. Ο ανιχνευτής καταγράφει συχνότητα μέχρι την στιγμή t=70sec γιατί την στιγμή $t_{ολ}$=69sec σταμάτησε να εκμπέμπει η πηγή.

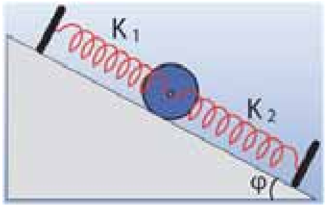
Ετσι η γραφική παράσταση της συχνότητας θα είναι



Η βαθμολόγηση του κατακόρυφου άξονα
δεν ξεκινά από το μηδέν.

Το εμβαδό ανάμεσα στις καμπύλες και στον άξονα των χρόνων εκφράζει τον αριθμό των κυμάτων που ανίχνευσε ο ανιχνευτής ήχων. Τα κύματα όμως αυτά τα έχει εκπέμψει η πηγή. Επειδή δεν μπορούν να χαθούν κύματα Ns=NA. Από τον ορισμό της συχνότητας θα έχουμε Fs=Ns/Δts άρα Ns=680.69=46920 κύματα.

Άλλη μια παραλλαγή με κρούση.



Στο παρακάτω σχήμα ο ομογενής δίσκος έχει μάζα M_1=2 Kg, ακτίνας R και είναι δεμένος στο κέντρο του με δύο ελατήρια που έχουν σταθερές K_1=200N/m και K_2=100N/m και δεν εμποδίζουν την περιστροφή του δίσκου γύρω από το κέντρο μάζας του. Το κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $φ=30^o$ και την χρονική στιγμή t=0 ο δίσκος αφήνεται ελεύθερος ενώ εκείνη τη στιγμή τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε όλη τη διάρκεια της κίνησή του.

Α. Να αποδειχθεί ότι το κέντρο μάζας του δίσκου θα εκτελέσει γ.α.τ.

Β. Να γραφεί η εξίσωση απομάκρυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου αν υποτεθεί ότι θετική φορά είναι η αρχική φορά της αρχικής επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου.

Γ. Να βρεθεί ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής έτσι ώστε ο δίσκος να συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Κάποια στιγμή ένα σημειακό βλήμα μάζας m=1kg κινείται παράλληλα με το κεκλιμένο επίπεδο και σφηνώνεται ακαριαία στο κέντρο μάζας του δίσκου ενώ η ταχύτητα του κέντρου μάζας η ταχύτητα του βλήματος έχουν αντίθετη φορά.

Δ. Σε ποια θέση πρέπει να γίνει η στιγμιαία κρούση των δύο σωμάτων αν θέλουμε το σύστημα να εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση;

Ε. Ποια το μέτρο της ταχύτητα του βλήματος;

Δίνεται για το δίσκο $I_{cm}= ½M_1R^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την αρχική θέση ισορροπίας του κέντρου μάζας του δίσκου θα ισχύει $M_1gημφ=(K_1+K_2)x_1$ θα βρούμε $x_1=1/30$ m.

Για μία τυχαία απομάκρυνση και με την βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε:

$$M_1gημφ–K_1(x_1-x)–K_2(x_1-x)–T_{στ}=M_1a_{cm} \quad (1)$$

$$T_{στ}.R=0,5M_1R^2α_{γων} \text{ ή } T_{στ}=M_1a_{cm}/2 \quad (2)$$

Και με τη βοήθεια των (1) και (2) $Tστ=(K_1+K_2)x/3$ (3)

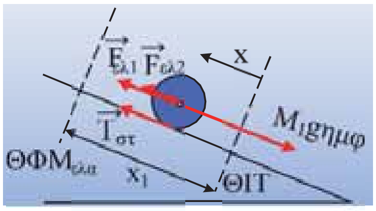
Για την ταλάντωση και θεωρώντας θετική φορά την φορά της απομάκρυνσης θα έχουμε

$$ΣF=T_{στ}+K_1(x_1-x)+K_2(x_1-x)–M_1gημφ$$

και με την βοήθεια της σχέσης (3) θα καταλήξουμε ότι:

$$ΣF=-2(K_1+K_2)x/3=-200x \text{ (SI)}$$

άρα το κέντρο μάζας εκτελεί γ.α.τ. με D=200N/m



Β. Την χρονική στιγμή t=0 ο δίσκος είναι ακίνητος και βρίσκεται στην μέγιστη θετική του απομάκρυνση. Αρα η εξίσωση της απομάκρυνσης του κέντρου μάζας θα δίνεται από την σχέση $x_{cm}=Αημ(ωt+φ_o)$ με

$A=x_1=1/30$ m και $ω=\sqrt{\frac{D}{M_1}}=10$r/s άρα η τελική εξίσωση

$$x_{cm}=\frac{1}{30}ημ\left(10t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Γ. Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ο δίσκος θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κύλισης $Τ_{στ}<Τ_{ολ}$ και με την βοήθεια της σχέσης (3)

$$Τ_{στ(max)}=(K_1+K_2)A/3=10/3 \text{ N}$$

$$\text{Άρα } \frac{10}{3}<\mu M_1 g συνφ \text{ άρα } \mu_{min}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

Δ. Επειδή θέλουμε να σταματήσει η μεταφορική κίνηση του συστήματος των δύο σωμάτων μετά την πλαστική και ακαριαία κρούση τους το σύστημα θα πρέπει να βρίσκεται την στιγμή της κρούσης στην τελική θέση ισορροπίας του. Στην θέση αυτή θα ισχύει

$(M_1+m)gημφ=(K_1+K_2)x_2$ θα βρούμε $x_2=1/20$ m

όπου x_2 η απόσταση της τελικής θέσης ισορροπίας του συστήματος σε σχέση με το φυσικό μήκος των δύο ελατηρίων.

Ε. Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για αυτή τη θέση θα βρούμε τη ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου

$$\frac{1}{2} M_1 \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} D(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} DA^2 \text{ θα βρούμε } \upsilon_{cm} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ m/s}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΟ για τον άξονα της κίνησης των δύο σωμάτων θα έχουμε

$$M_1 \upsilon_{cm} - m\upsilon = 0 \text{ άρα } \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m/s}$$

Την στιγμή της κρούσης οι δυνάμεις είναι κεντρικές και έτσι η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου δεν θα αλλάξει. Ετσι στην θέση αυτή το σύστημα θα εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση.

Διπλή κρούση και περιστροφή.

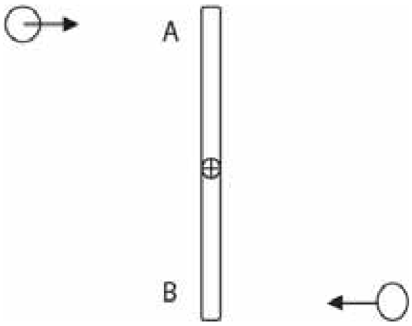
Οριζόντια λεπτή ράβδος ΑΒ μάζας M=1,2kg και μήκους L=1 m μπορεί να ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K= 120 N/m που είναι συνδεδεμένο στο κέντρο της ράβδου .
Η ράβδος έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται χωρίς τριβές οριζόντια γύρω από το κατακόρυφο ελατήριο. Δύο σημειακά βλήματα με μάζες $m_1=m_2=0,1Kg$ μπορούν να κινούνται οριζόντια με ταχύτητες $U_1=U_2=10m/sec$ παράλληλα προς το έδαφος και κάθετα προς τη ράβδο κινούμενα αντίθετα και με φορά προς τα άκρα Α και Β της ράβδου. Τα δύο βλήματα συγκρούονται ακαριαία και πλαστικά με τα άκρα Α και Β της ράβδου. Να βρεθούν:

Α. Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδου-σημειακών μαζών μετά την κρούση.
Β. Το πλάτος ταλάντωσης που θα εκτελέσει το κέντρο μάζας της ράβδου.
Γ. Η ολική μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση.

Για την ράβδο $I_{cm}=1/12.M.L^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με τη βοήθεια της κάτοψης του σχήματος



Και με τη βοήθεια της ΑΔΟ και της ΑΔΣ θα έχουμε

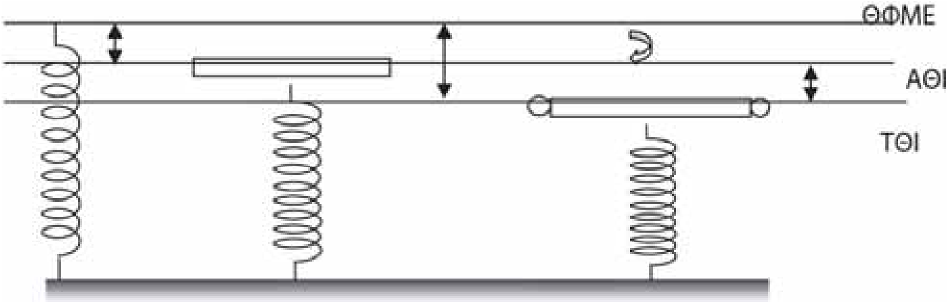
$m_1.U_1-m_2.U_2=(m_1+m_2+M)U_{συστ}$ θα βρούμε $U_{συστ}=0m/sec$.

Το κέντρο μάζας δηλαδή δεν θα κινηθεί οριζόντια.

$m_1.U_1.L/2 + m_2.U_2.L/2=(m_1.L^2/4 + m_2.L^2/4+1/12.M.L^2).\omega_{συστ}$

μετά από πράξεις $\omega_{συστ}=20/3$ r/sec

Β. Μετά την κρούση και επειδή οι μάζες m_1 και m_2 είναι ίσες και η απόστασή τους από το κέντρο της ράβδου είναι ίδια η συνισταμένη των ροπών ως προς το κέντρο της ράβδου είναι 0. Αρα το σύστημα δεν θα περιστραφεί κατακόρυφα. Μετά την κρούση έχουμε αλλαγή της μάζας του συστήματος άρα και αλλαγή της θέσης ισορροπίας για την κατακόρυφη τώρα πια ταλάντωση του κέντρου μάζας της ράβδου



Για την αρχική ισορροπία της ράβδου

$$Mg=K.x_1 \text{ άρα } x_1=0{,}1m$$

Για την τελική ισορροπία της ράβδου

$$(M+m_1+m_2)g=Kx_2 \text{ άρα } x_2=7/60m$$

Το σύστημα μετά την κρούση δεν έχει κατακόρυφη ταχύτητα. Ετσι το κέντρο μάζας του συστήματος θα βρίσκεται στην ακραία θέση ταλάντωσή του.

$$\text{Αρα } A_{cm}=x_2-x_1=1/60m.$$

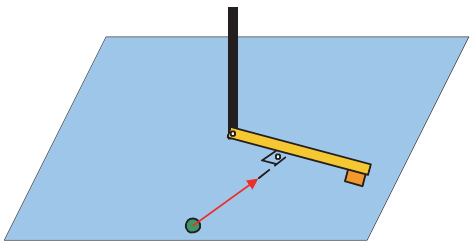
Γ. Το σύστημα τώρα εκτελεί ομαλή οριζόντια στροφική κίνηση με $\omega_{συστ}=20/3$ r/sec αλλά και κατακόρυφη ταλάντωση με πλάτος $A_{cm}=1/60m$.

Αρα η μέγιστη κινητική του ενέργεια θα συμβαίνει ότι το σύστημα διέρχεται από την ΤΘΙ.

$$\text{Αρα } K_{ολmax}=1/2.K.A_{cm}^2+1/2.I_{ολ}.\omega_{συστ}^2=3{,}35J.$$

Διπλή κρούση και ρυθμοί μεταβολής Κινητικής ενέργειας

Πάνω σε οριζόντιο τραπέζι βρίσκεται ράβδος μάζας M=3Kg και μήκους l=2m. Το ένα άκρο της ράβδου είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο άξονα ενώ στο άλλο άκρο της ράβδου έχουμε στερεώσει σώμα μάζας m=1kg που ακουμπάει στο τραπέζι. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται παράλληλα με το τραπέζι χωρίς να βρίσκεται σε επαφή με αυτό γύρω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής της. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος m και τραπεζιού είναι μ=0,3. Βλήμα μάζας m_1=1 kg κινείται παράλληλα με το τραπέζι και κάθετα προς την ράβδο με ταχύτητα υ=100m/s .Το βλήμα συγκρούεται πλαστικά με το κέντρο μάζας της



ράβδου. Μετά από χρόνο Δt=5/9sec από την πρώτη κρούση ένα δεύτερο βλήμα μάζας m_2=0,25kg πέφτει κατακόρυφα προς το τραπέζι συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m.

A. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λίγο πριν συμβεί η δεύτερη κρούση και αμέσως μετά τη δεύτερη κρούση.
B. Να βρεθεί η συνολική γωνία που θα διαγράψει η ράβδος μέχρι να σταματήσει.

Τα βλήματα να θεωρηθούν σημειακά και ότι οι κρούσεις γίνονται ακαριαία. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από τον άξονα περιστροφής της $I=1/3Ml^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Αν εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα θα έχουμε

$$L_{αρχ}=L_{τελ} \qquad άρα\ m_1 υ\cdot L/2=I_{ολ}ω_1\ (1)$$

Το $I_{ολ}=1/3ML^2+m_1(L/2)^2+m.L^2=9kg\cdot m^2$.

Με αντικατάσταση στην (1) θα πάρουμε $ω_1=100/9$ r/sec.

Η δύναμη τριβής είναι $T=μ.N$ όπου N η κάθετη αντίδραση του δαπέδου στο σώμα m. Αν πάρουμε την ισορροπία του συστήματος στον άξονα ψψ΄ με την συνθήκη των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου θα έχουμε $Στ(O)=0$ άρα

$$-Mg.L/2-m.g.L-m_1.g.L/2+N.L=0$$

άρα N=30N άρα T=0,3.30=9N.

Το σύστημα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφικά κίνηση με την δύναμη της τριβής να επιβραδύνει το σώμα. Από τον νόμο της στροφικής κίνησης θα πάρουμε

$$Στ=Iα_{γων} \qquad άρα\ Tα\cdot L=I_{ολ}α_{γων} \quad άρα\ α_{γων}=2rad/sec^2.$$

Έτσι: $ω_2=ω_1-α_{γων}\cdot t=100/9\ \ -2.5/9=10rad/sec$.

Αρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$ΔK/Δt=-T\cdot L\cdot ω_2=-180J/sec.$$

Το $I_{ολ}΄=1/3ML^2+m_1(L/2)^2+m\cdot L^2+m_2.L^2=10kg\cdot m^2$.

Αν εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα και για την δεύτερη κρούση θα έχουμε

$$L_{αρχ}=L_{τελ} \quad \text{άρα} \quad I_{ολ}ω_2=I_{ολ}΄.ω_3$$

θα πάρουμε $ω_3=9r/sec$.

Αν πάρουμε και πάλι την ισορροπία του συστήματος στον άξονα ψψ΄ με την συνθήκη των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου θα έχουμε

$$Στ(O)=0 \quad \rightarrow$$

$$-Mg.L/2 - m.g.L - m_1.g.L/2 - m_2.g.L + N΄.L=0 \quad \rightarrow$$

$$N΄=32{,}5N \quad \text{άρα} \quad T΄=0{,}3.32{,}5=9{,}75N.$$

Αρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας αμέσως μετά την κρούση θα είναι :

$$ΔK/Δt΄=-T΄\cdot L\cdot ω_3=-175{,}5J/sec.$$

Β. Για την πρώτη κίνηση θα βρούμε την γωνιακή μετατόπιση της ράβδου από την σχέση $θ_1=ω_1\cdot t-1/2\,α_{γων}\cdot t^2=475/81=5{,}86rad$.

Για την κίνηση του συστήματος μετά την κρούση και με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε:

$$K_{συσ}=Q_{τρ} \quad \rightarrow$$

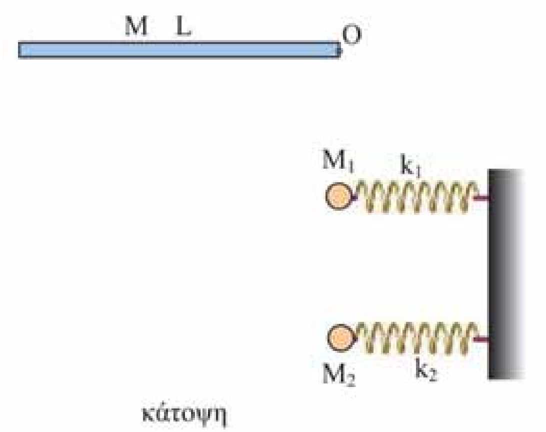
$$1/2 I_{ολ}΄.ω_3^2=T΄L.θ_2 \quad \rightarrow$$

$$θ_2=20{,}77rad.$$

$$\text{Αρα} \quad θ_{ολ}=26{,}63rad.$$

Διπλή κρούση ράβδου με σημειακές μάζες

Ράβδος μάζας M=0,3Kg και μήκους L=2m μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το ένα της άκρο στο σημείο O πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι όπως στο παρακάτω σχήμα.



Το σημείο O και τα σημειακά σώματα M_1 και M_2 που έχουν μάζες M_1=M_2=1K βρίσκονται στην ίδια ευθεία και απέχουν L/2 και L αντίστοιχα από το σημείο O. Οι άξονες των ελατηρίων είναι παράλληλοι μεταξύ τους και κάθετοι στην ευθεία που ενώνει τα σώματα και το σημείο O. Δίνουμε αρχική γωνιακή ταχύτητα ω=10 r/s στην ράβδο έτσι ώστε η ράβδος μετά από λίγο να χτυπήσει ταυτόχρονα τις ακίνητες μάζες M_1 και M_2.

Μετά την ταυτόχρονη κρούση της ράβδου με τα δύο σώματα η ράβδος σταματάει ακαριαία. Τα σώματα με μάζες M_1 και M_2 είναι συνδεδεμένα με ιδανικά ελατήρια που έχουν σταθερές K_1=100N/m και K_2=25N/m και μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω στο τραπέζι. Αν μετά και τη δεύτερη κρούση η ράβδος απομακρυνθεί με κάποιο τρόπο από το τραπέζι και το ένα σώμα συνεχίζει να ταλαντώνεται με το αρχικό του πλάτος A=0,1m ενώ το άλλο σώμα ταλαντώνεται με το μισό του αρχικού του πλάτους να βρεθούν:

Α. Το αρχικό και το τελικό πλάτος ταλάντωσης του ενός σώματος
Β. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά και τη δεύτερη κρούση
Γ. Πόση η συνολική θερμότητα παράχθηκε στο παραπάνω φαινόμενο.

Δίνεται για την ράβδο $I_{cm}=1/12.M.L^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την κρούση της ράβδου με τα δύο σημειακά σώματα θα βρω με τη βοήθεια της ΑΔΣ

$$I.\omega=M_1.U_1.L/2 + M_2.U_2.L \qquad (1)$$

Η περίοδος ταλάντωσης του σώματας M_1 είναι $T_1=2\pi\sqrt{M_1/K}=\pi/5s$

Η περίοδος ταλάντωσης του σώματας M_2 είναι $T_2=2\pi\sqrt{M_2/K}=2\pi/5s$

Παρατηρώ ότι $T_1<T_2$ άρα το σώμα με μάζα M_1 θα επιστρέψει πρώτο στην θέση ισορροπίας του μετά από χρόνο $T_1/2$ και έτσι αυτό θα είναι το σώμα που θα ξαναχτυπήσει τη ράβδο. Το σώμα μάζας M_2 θα συνεχίσει την αρχική του ταλάντωση με το αρχικό πλάτος ενώ το σώμα μάζας M_1 θα ταλαντώνεται με το μισό του αρχικού του πλάτους. Από την ταλάντωση του σώματος M_2

$U_2=\omega_2.A_2$ άρα $U_2=0{,}5m/s$ και από την σχέση (1) $U_1=3m/sec$

Από την ταλάντωση του σώματος M_1 $U_1=\omega_1.A_1$ άρα $A_1=0{,}3m$ και από τα δεδομένα του προβλήματος $A_1'=0{,}15m$.

Β. Μετά την δεύτερη κρούση του σώματος M_1 με την ράβδο το σώμα εκτελεί ταλάντωση με το μισό του αρχικού πλάτους αλλά δεν γνωρίζουμε τη φορά της ταχύτητας του σώματος M_1. Ετσι πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις.

1. αν η φορά την ταχύτητας είναι ίδια με την αρχική ή
2. η φορά της ταχύτητας είναι αντίθετη της αρχικής.

Για την πρώτη περίπτωση και με την βοήθεια της ΑΔΣ θα βρω:

$M_1.U_1.L/2=I.\omega_1+M_1.U_1'.L/2$ (2) και $U_1'=\omega_1.A_1'$ άρα

$U_1'=1{,}5m/s$ και από την (2) $\omega_1=15/4$ r/s

Για την δεύτερη περίπτωση και με την βοήθεια της ΑΔΣ θα βρω:

$M_1.U_1.L/2=I.\omega_1-M_1.U_1'.L/2$ (3) και $U_1'=\omega_1.A_1'$ άρα

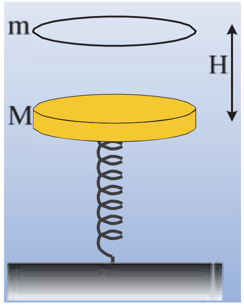
$U_1'=1{,}5m/s$ και από την (2) $\omega_1=45/4$ r/s

Παρατηρώ ότι η τελική γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στην δεύτερη περίπτωση είναι μεγαλύτερη της αρχικής γωνιακής ταχύτητας. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί γιατί τότε το σύστημα θα είχε μεγαλύτερη ενέργεια από την αρχική ενέργεια αφού και η ράβδος αλλά και τα σώματα θα είχαν μεγαλύτερη ενέργεια από την αρχική τους. Ετσι η δεύτερη περίπτωση πρέπει να απορριφθεί.

Γ. Για να βρω την θερμότητα θα εφαρμόσουμε ΑΔΕ για την αρχική και τελική κατάσταση της ράβδου και των δύο σωμάτων

$K_{αρχ}=K_{τελ}+E_1+E_2+Q$ άρα $½.I.\omega^2=1/2.I.\omega_1^2+1/2K_1.A_1'^2+1/2.K_2.A_2^2+Q$ μετά από πράξεις θα βρούμε $Q=15{,}9375J$

Δίσκος και δακτυλίδι με κρούση και ταλάντωση



Ένας λεπτότατος δίσκος μάζας M=1Kg και ακτίνας R=0,3m ισορροπεί οριζόντιος με την βοήθεια ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K=100N/m και φυσικού μήκους L_0=0,7875m. Το ελατήριο είναι περασμένο στο κέντρο του δίσκου αφήνοντας τον ελεύθερο να περιστρέφεται οριζόντιος και χωρίς τριβές με το άκρο του ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα στο έδαφος. Δαχτυλίδι μάζας m=0,5Kg και ακτίνας R=0,3m βρίσκεται ακίνητο σε ύψος H=0,8m πάνω από τον δίσκο σε οριζόντια θέση έτσι ώστε τα κέντρα του δίσκου και του δαχτυλιδιού να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη. Με την βοήθεια μιας στιγμιαίας ροπής ζεύγους δίνουμε στο δαχτυλίδι αρχική κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0=10r/s και ταυτόχρονα αφήνουμε το δαχτυλίδι ελεύθερο. Το δαχτυλίδι μετά από λίγο και τη χρονική στιγμή t=0 διαπερνάει ακαριαία το δίσκο και εξέρχεται από αυτόν με το μέτρο της αρχικής του γωνιακής ταχύτητα να μειώνεται κατά 50%.Το δαχτυλίδι εξαιτίας της κρούσης με το δίσκο χάνει το 75% της κινητικής του ενέργειας που είχε λίγο πριν γίνει η κρούση με το δίσκο.

Να βρεθούν:

Α. Η μέγιστη κινητική ενέργεια του δαχτυλιδιού αν η κρούση με το δάπεδο είναι πλαστική.

Β. Η μέγιστη κινητική του δίσκου

Γ. Η σχέση του μέτρου της ταχύτητας ενός σημείου του άκρου του δίσκου σε συνάρτηση του χρόνου αν θετική φορά θεωρηθεί η φορά προς τα κάτω.

Για το δίσκο I_{cm}=0,5MR^2 και g=10m/sec^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το δαχτυλίδι πέφτοντας εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή την αρχική του γωνιακή ταχύτητα μιας και η μοναδική δύναμη που επιδρά πάνω του είναι το βάρος που δεν μπορεί να προκαλέσει καμία ροπή. Ταυτόχρονα όμως εκτελεί και μεταφορική κίνηση που είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση μέχρι την κρούση με το δίσκο θα έχουμε

$$mgH = ½\ m\, υ_{cm}^2 \text{ άρα } υ_{cm} = 4m/sec.$$

Με την βοήθεια των δεδομένων ισχύει $K_{τελ}$=0,25$K_{αρχ}$ άρα:

$$½\, I\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 + ½\, mυ_{cmτελ}^2 = 0{,}25\ (½\, I\omega_0^2 + ½\, mυ_{cm}^2)$$

θα βρούμε $υ_{cmτελ}$=2m/sec.

Για την αρχική ισορροπία του δίσκου θα ισχύει

$$Mg = Kx_1 \text{ άρα } x_1 = 0{,}1m.$$

Ο δίσκος βρίσκεται σε ένα τελικό ύψος πάνω από το έδαφος

$$D = L_o - x_1 = 0{,}6875m.$$

Μετά την κρούση το δαχτυλίδι εκτελεί και πάλι ομαλή στροφική και επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση. Έτσι την μέγιστη κινητική του ενέργεια το δαχτυλίδι θα την έχει λίγο πριν την πλαστική του κρούση με το δάπεδο. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κίνηση του δαχτυλιδιού μετά την κρούση θα έχουμε

$$\frac{1}{2} I\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m\upsilon_{cm\tau\varepsilon\lambda}^2 + mgD = K_{max} \quad \text{άρα} \quad K_{max} = 5J$$

Β. Για την στιγμιαία κρούση του δαχτυλιδιού και του δίσκου θα πάρουμε με την βοήθεια της ΑΔΣ και της ΑΔΟ

$$mR^2\omega_0 = 0{,}5MR^2\omega_1 + mR^2\omega_0/2 \quad \text{θα βρούμε } \omega_1 = 5r/s$$

$$m\upsilon_{cm} = m\upsilon_{cm\tau\varepsilon\lambda} + M\upsilon_{\delta\iota\sigma\kappa} \quad \text{θα βρούμε } \upsilon_{\delta\iota\sigma} = 1m/s$$

Ο δίσκος θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_1=5r/s και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας του δίσκου θα εκτελεί κατακόρυφη γ.α.τ. με εξίσωση ταλάντωσης ταχύτητας:
υ=1 συν10t (S.I.) Ετσι η μέγιστη κινητική ενέργεια του δίσκου θα είναι όταν αυτός βρίσκεται στην ΘΙΤ για την ταλάντωση και θα είναι:

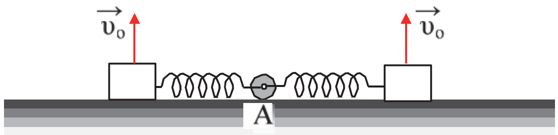
$$K_{max} = K_{\mu\varepsilon\tau max} + K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2} M\upsilon_{\delta\iota\sigma}^2 + \frac{1}{2} I\omega_1^2 = 1{,}0625J$$

Γ. Οποιοδήποτε σημείο της περιφέρειας του δίσκου θα ταχύτητα που θα αποτελείται από το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας λόγω μεταφορά και της γραμμικής ταχύτητας λόγω περιστροφής. Οι δύο αυτές ταχύτητες είναι συνεχώς κάθετες μεταξύ τους. Έτσι το μέτρο της συνολικής ταχύτητας του κάθε σημείου της περιφέρειας του δίσκου θα δίνεται από την σχέση

$$\upsilon = \sqrt{(\omega_1 R)^2 + \upsilon^2} = \sqrt{2{,}25 + \sigma\upsilon\nu^2 10t} \text{ (SI)}$$

Δύο ελατήρια και μια κρούση

Στο παρακάτω σχήμα τα ελατήρια έχουν σταθερές K_1=K_2=100N/m,φυσικό μήκος l_o=0,51m, ενώ τα σώματα έχουν μάζες m_1=m_2=1kg. Κάποια χρονική στιγμή εκτοξεύουμε ταυτόχρονα τα δύο σώματα με κατακόρυφη αρχική ταχύτητα μέτρου U_o. Τα ελατήρια αρχικά έχουν το φυσικό τους μήκος και είναι στερεωμένα ακλόνητα στο σημείο Α. Τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά όταν τα ελατήρια γίνουν κατακόρυφα και οι ταχύτητες των σωμάτων γίνουν οριζόντιες.



Αν μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί με την βοήθεια των δύο ελατηρίων κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση πλάτους Α=0,09 m.
Να βρεθούν:

Α. Το ύψος πάνω από το έδαφος που έγινε η σύγκρουση
Β. Το μέτρο της αρχικής U_o.
Γ. Η απώλεια της ενέργειας του συστήματος εξαιτίας της πλαστικής κρούσης των δύο σωμάτων.

Δίνεται ότι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς ελάχιστα πριν την κρούση, είναι ίση με το μήκος του ελατηρίου στη θέση αυτή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

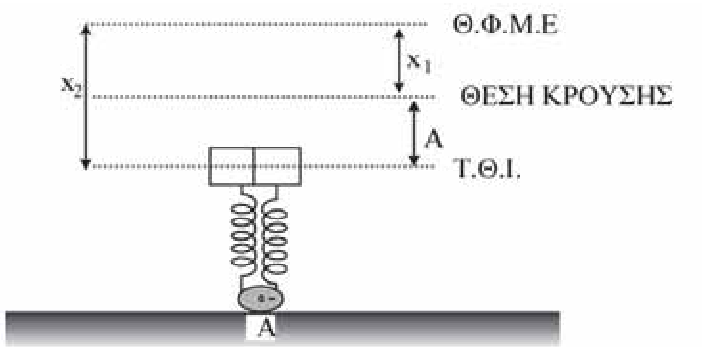
Σχόλια για την άσκηση:

Η άσκηση δεν μελετά τη κίνηση των σωμάτων, δίνω σαν δεδομένα δύο πράγματα.

1. το ότι τη στιγμή της σύγκρουσης οι ταχύτητες είναι οριζόντιες και
2. η ακτίνα καμπυλότητας την στιγμή της κρούσης πρέπει να θεωρηθεί ίση με το μήκος του ελατηρίου εκείνη τη στιγμή.

Με αυτά τα δεδομένα η λύση στέκει.

Α. Επειδή τα σώματα έχουν την ίδια αρχική ταχύτητα την ίδια μάζα και φτάνουν ταυτόχρονα στην κατακόρυφη θέση μετά την κρούση τους θα έχουν μηδενική ταχύτητα εξαιτίας της Α.Δ.Ο. Μετά την κρούση υπάρχει ένα σώμα μάζας $m_{ολ}$=2Kg που είναι συνδεδεμένο με δύο ελατήρια όπως στο παρακάτω σχήμα.



Για την θέση ισορροπίας του συστήματος ισχύει

$$m_{ολ}.g=(K_1+K_2).x_2 \text{ άρα } x_2=0{,}1m$$

Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα δεν είχει ταχύτητα άρα βρισκόταν σε ακραία θέση της ταλάντωσής του. Το $A=x_2-x_1$ (1) όπου x_1 η συσπείρωση του κάθε ελατηρίου πριν την κρούση των δύο σωμάτων. Με την βοήθεια της σχέσης (1) x_1=0,01m.

Αρα το ύψος της κρούσης από το έδαφος θα είναι

$$H=l_o-x_1=0,5m.$$

Β. Αν υποθέσουμε ότι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς ελάχιστα πριν την κρούση, είναι ίση με το μήκος του ελατηρίου στη θέση αυτή με την βοήθεια της κεντρομόλου δύναμης για κατακόρυφη θέση θα έχουμε

$M.g-k.x_1=M.U^2/H$ μετά από πράξεις $U=\sqrt{4,5}m/sec$.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην θέση κρούσης θα έχουμε

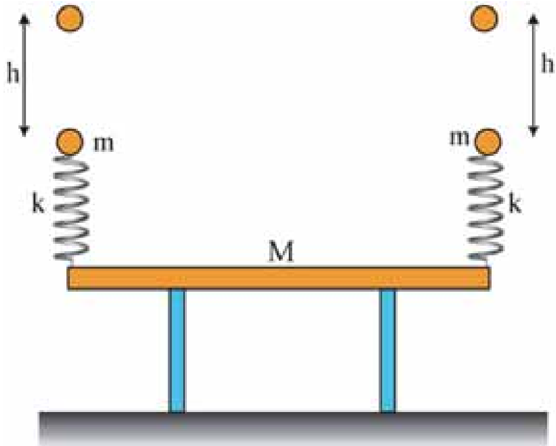
$½.M.U_o^2=1/2.K.x_1^2+M.g.H+1/2.M.U^2$ θα βρούμε $U_o=\sqrt{14,51}m/sec$

Γ. Με την βοήθεια της ΑΔΕ πριν και μετά την κρούση θα έχουμε

$½.M.U^2+½.M.U^2=Q_{κρ}$ άρα $Q_{κρ}=4,5J$

Ισορροπία δοκού, ελαστική κρούση με ταλαντώσεις.

Ένα οριζόντιο δοκάρι ΑΓ μήκους l=4m και μάζας M=4kg στηρίζεται σε δύο κατακόρυφους στύλους που απέχουν 1m από το κάθε άκρο του δοκαριού. Στο κάθε άκρο του δοκαριού στερεώνουμε από ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς K=100N/m και πάνω στο κάθε ελατήριο στερεώνουμε από ένα σώμα μάζας m=1kg όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από ύψος H=0,05m πάνω από τα σώμα που βρίσκεται στην άκρη Α αφήνουμε άλλο σώμα μάζας m=1kg και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα m.

Μετά από χρόνο Δt=π/10 sec από την στιγμή που αφήσαμε το πρώτο σώμα αφήνουμε και ένα δεύτερο σώμα μάζας m που βρίσκεται και πάλι σε ύψος H=0,05m πάνω από το σώμα m που βρίσκεται πάνω από το άκρο Γ.

Μετά τις ελαστικές κρούσεις των σωμάτων m,με τα σώματα που είναι δεμένα με τα ελατήρια, απομακρύνονται με κατάλληλο μηχανισμό.

Αν t=0 θεωρηθεί η στιγμή της δεύτερης ελαστικής κρούσης να βρεθούν:

Α. Οι εξισώσεις των δυνάμεων που δέχεται το δοκάρι από τα υποστηρίγματα αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα πάνω. Οι α.α.τ. θα εξελιχθούν ομαλά ή όχι;

Β. Αν οι δύο σφαίρες έπεφταν ταυτόχρονα ποιο θα έπρεπε να ήταν το H_{min} και για τις δύο μπάλες έτσι ώστε μόλις το δοκάρι να μην χάσει την επαφή του και με τα δύο υποστηρίγματά του;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α . Το κάθε ελατήριο είναι συσπειρωμένο εξαιτίας του βάρους του σώματος m. Για αυτή την ισορροπία θα έχουμε

$$m.g=K.x_1 \text{ άρα } x_1=0{,}1m.$$

Λίγο πριν την κάθε κρούση τα σώματα m θα έχουν ταχύτητα U που θα την βρούμε από την ΑΔΕ .Για την πτώση των σωμάτων m έχουμε

$$m.g.H=1/2m\,\upsilon^2 \text{ άρα } \upsilon=1m/sec.$$

Επειδή τα δύο σώματα που θα συγκρουστούν ελαστικά έχουν τις ίδιες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Οι ταχύτητες αυτές τώρα θα είναι μέγιστες για την α.α.τ. που θα ακολουθήσει.

$$U=\omega.A \text{ άρα } A=0{,}1m.$$

Παρατηρώ ότι το $A=x_1$ άρα το σώμα m δεν θα ξεπεράσει τη ΘΦΜΕ. Κατά την ταλάντωση του πρώτου μόνο σώματος είναι πιθανόν να χαθεί η επαφή με το δεύτερο υποστήριγμα. Αν το σύστημα ισορροπούσε στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης τότε θα ισορροπούσε και σε όλη την διάρκεια της ταλάντωσης της.

$\Sigma F_{\psi}=0$ άρα $N_1+N_2=F_{\varepsilon\lambda 1}+F_{\varepsilon\lambda 2}+W_{\rho}$ άρα $N_1+N_2=20+10+40=70N$

Και από την $\Sigma\tau(\Delta)=0$: $20-40+2N_2-10.3=0$ άρα $N_2=25N$ άρα $N_1=45N$

Παρατηρώ ότι η επαφή δεν χάνεται κατά την διάρκεια της ταλάντωσης μόνο του ενός σώματος.

Ο χρόνος $\Delta t=\pi/10$ sec αντιστοιχεί σε χρόνο T/2 για την ταλάντωση των σωμάτων. Ετσι όταν το ένα σώμα m έχει κάνει μισή α.α.τ. τότε αρχίζει και η δεύτερη ταλάντωση. Το πρώτο λοιπόν σώμα βρίσκεται στην ΘΙΤ και πάει προς τα πάνω ενώ το δεύτερο βρίσκεται επίσης στην ΘΙΤ αλλά πάει προς τα κάτω. Έτσι οι δύο εξισώσεις των απομακρύνσεων των ταλαντώσεων θα έχουν εξισώσεις

$$\Psi_1=0,1\eta\mu 10t \quad \text{και} \quad \Psi_2=0,1\eta\mu(10t+\pi) \quad (S.I)$$

Για την κάθε δύναμη του ελατηρίου θα ισχύει $F_{\varepsilon\lambda}-m.g=-K.\Psi$.

Άρα η δύναμη του ελατηρίου θα είναι:

$$F_{\varepsilon\lambda 1}=10-10\eta\mu 10t \quad (S.I.) \quad \text{ενώ}$$

$$F_{\varepsilon\lambda 2}=10-10\eta\mu(10t+\pi)=10+10\eta\mu 10t \, (S.I.).$$

Οι δυνάμεις αυτές μεταφέρονται μέσω του ελατηρίου και στο άκρο Α και στο άκρο Γ και έχουν πάντοτε φορά προς τα κάτω αφού το ελατήριο δεν ξεπερνάει ποτέ τη ΘΦΜΕ.

Για την ισορροπία του δοκαριού θα έχουμε

$\Sigma F_{\psi}=0$ άρα $N_1+N_2-W_{\delta}-F_{\varepsilon\lambda 1}-F_{\varepsilon\lambda 2}=0$ (1)

$\Sigma\tau(\Delta)=0$ άρα

$$-W_{\delta}.(M\Delta)+N_2(\Delta N)-F_{\varepsilon\lambda 2}(\Delta\Gamma)+F_{\varepsilon\lambda 1}(A\Delta)=0 \quad \text{άρα}$$

$-40+N_2.2-(10+10ημ10t).3+10-10ημ10t=0$

$$\text{άρα } N_2=30+20ημ10t \text{ (S.I).}$$

και από την (1) θα πάρουμε

$$N_1=30-20ημ10t \text{ (S.I)}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι και το $N_1>0$ και το $N_2>0$.

Ετσι οι α.α.τ εξελίσσονται κανονικά .

(Ευτυχώς εδώ ο ιός H_1N_1 δεν έκανε την ζημιά του στην N_1 ή στην N_2)

B. Στην περίπτωση που θα αφήσουμε ταυτόχρονα τα δύο σώματα οι ταλαντώσεις των δύο σωμάτων m θα είναι συμφασικές και οι δυνάμεις των ελατηρίων στα δύο άκρα θα είναι συνεχώς ίσες κατά φορά και μέτρο. Για να μην χαθεί η επαφή του δοκαριού με τα υποστηρίγματα θα πρέπει η δύναμη από το κάθε υποστήριγμα να είναι:

$$N_1=N_2\geq 0.$$

Για να συμβεί οριακά N=0 θα πρέπει τα ελατήρια να επιμηκυνθούν τόσο ώστε οι δυνάμεις των ελατηρίων να εξουδετερώσουν το βάρος του δοκαριού. Ετσι στην οριακή αυτή κατάσταση

$$W_δ=F_{ελ1}+F_{ελ2} \quad \text{άρα } 40=2.Kx_{ελ} \text{ άρα } x_{ελ}=0,2m.$$

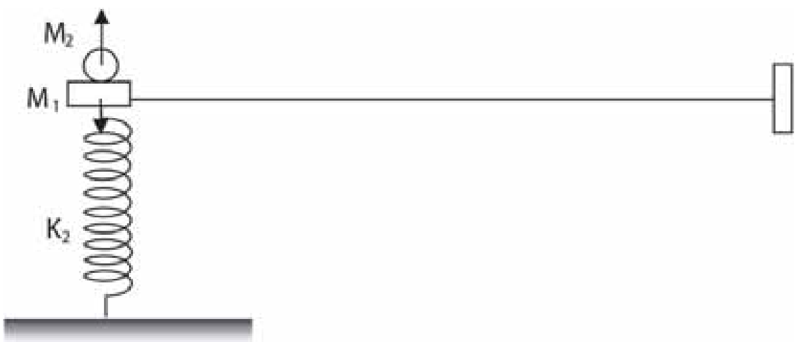
Το νέο πλάτος της νέας α.α.τ. θα είναι A΄=0,3m

Αρα η νέα U_{max}=3m/sec και το νέο ύψος θα βγει από την ΑΔΕ

$$m.g.H΄=1/2m\, U_{max}^2 \quad \text{άρα } H΄=0,45m.$$

Κρούσεις και κύμα.

Στο παρακάτω σχήμα το κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=100\pi^2 N/m$ είναι δεμένο με σώμα μάζας $m_1=1Kg$ και το σύστημα ισορροπεί.



Την χρονική στιγμή t=0 εκτοξεύουμε ταυτόχρονα και κατακόρυφα το σώμα μάζας m_1 αλλά και το δεύτερο σώμα μάζας $m_2=m_1$ με αρχικές ταχύτητες $U_1=0,5$ m/sec και φορά προς τα κάτω το m_1 και $U_2=0,5$m/sec με φορά προς τα πάνω το m_2. Στην οριζόντια ελαστική χορδή που είναι δεμένη στο σώμα μάζας m_1 μπορούν να διαδίδονται αρμονικά κύματα με ταχύτητα διάδοσης U=10m/sec.

Αν όλες οι κρούσεις μεταξύ των σωμάτων που θα ακολουθήσουν είναι κεντρικές και ελαστικές να βρεθούν:

A. Η περίοδος και η θέση των κρούσεων των δύο σωμάτων.
B. Το σχήμα της ελαστικής χορδής τη χρονική στιγμή που έγινε η 5η κρούση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Η εξίσωση κίνησης του δεύτερου σώματος δίνεται από την σχέση

$$\psi_2=U_2.t-1/2.g.t^2=0{,}5t-5t^2.$$

Η εξίσωση κίνησης του πρώτου σώματος είναι $\psi_1=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ και επειδή $\omega=\sqrt{K/m_1}=10\pi$ r/sec $U_1=\omega.A$ το $A=0{,}05/\pi$ m η εξίσωση $\psi_1=0{,}05/\pi\ \eta\mu(10\pi t+\pi)$ (S.I.).

Η κρούση θα γίνει στην θέση όπου $\psi_1=\psi_2$

άρα $0{,}5t-5t^2=0{,}05/\pi\ \eta\mu(10\pi t+\pi)$ (1).

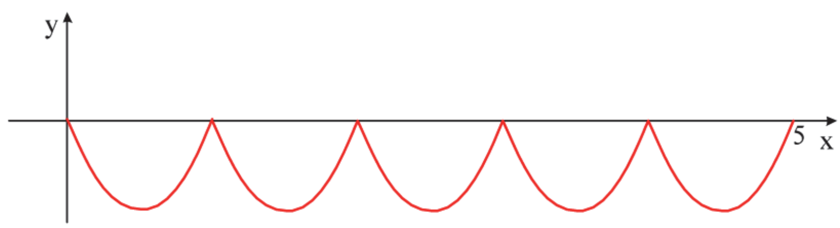
Η εξίσωση (1) μπορεί να λυθεί μόνο γραφικά και μόνο με την βοήθεια του mathematica. Μπορούμε όμως να παρατηρήσουμε ότι την στιγμή $t=0{,}1$sec το σώμα m_2 φτάνει στο $\psi_2=0$ αλλά και το σώμα m_2 φτάνει για πρώτη φορά στη θέση ισορροπίας αφού $T_1/2=0{,}1$sec. Ετσι η κρούση των δύο σωμάτων θα γίνει για πρώτη φορά στην θέση ισορροπίας του σώματος m_1. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική άρα τα δύο σώματα κατά την κρούση τους θα ανταλλάξουν ταχύτητες.

Το φαινόμενο θα παρουσιάζει περίοδο $T=T_1/2=0{,}1$sec.

Β. Η πέμπτη κρούση θα γίνει την χρονική στιγμή $t_2=5.0{,}1=0{,}5$sec και το κύμα θα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $\chi=U.t_2=5$m.

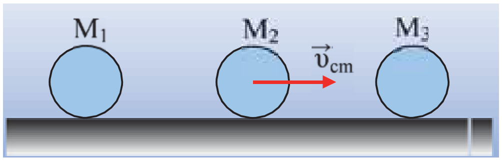
Αν η ταλάντωση γινόταν κανονικά το μήκος κύματος της χορδής θα ήταν $U=\lambda.f$ άρα $\lambda=2$m.

Η μορφή της ελαστική χορδής θα είναι η παρακάτω



Κρούσεις τριών ελαστικών σφαιρών.

Τρεις τέλεια ελαστικές και ίδιας ακτίνας R=0,2m σφαίρες βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Με κάποιον τρόπο αναγκάζουμε την μεσαία σφαίρα να κυλίσει χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο λείο επίπεδο με αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας του υ_{cm}=10m/s έτσι ώστε να πλησιάζει προς την δεξιά σφαίρα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Οι σφαίρες έχουν μάζες $M_1=M_2$=1Kg, ενώ η τρίτη σφαίρα έχει μάζα M_3=4Kg. Οι σφαίρες με μάζα M_1 και M_3 είναι αρχικά ακίνητες. Αν όλες οι κρούσεις που θα πραγματοποιηθούν είναι ελαστικές και γίνονται ακαριαία να βρεθούν:

Α. Τα μέτρα των τελικών ταχυτήτων των κέντρων μάζας όλων των σφαιρών

Β. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας με μάζα M_2 που μεταφέρθηκε στην σφαίρα με μάζα M_3.

Γ. Το ποιοτικό διάγραμμα της ταχύτητας του χαμηλότερου σημείου της σφαίρας με μάζα M_2.

Για τη σφαίρα δίνεται $I_{cm}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να κυλίεται η σφαίρα θα πρέπει να έχει γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R} = 50\text{r/s}$$

Κατά την διάρκεια της κρούσης οι δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι κεντρικές που δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπές. Έτσι η γωνιακή ταχύτητα της μεσαίας σφαίρας θα είναι συνεχώς σταθερή. Έτσι για την πρώτη ελαστική κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών M_2 και M_3 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της ελαστικής κρούσης ακίνητης με κινούμενη σφαίρα. Έτσι

$$\upsilon_3 = \frac{2M_2\upsilon_{cm}}{M_2 + M_3} = 4m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{(M_2 - M_3)\upsilon_{cm}}{M_2 + M_3} = -6m/s$$

Η δεύτερη σφαίρα επιστρέφει με ταχύτητα μέτρου 6m/s και ταυτόχρονα περιστρέφεται δεξιόστροφα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω=50r/s.

Η δεύτερη σφαίρα πέφτει με ταχύτητα του κέντρου μάζας του πάνω στην πρώτη σφαίρα που όμως έχει την ίδια μάζα με την δεύτερη σφαίρα. Έτσι οι δύο σφαίρες θα ανταλλάξουν ταχύτητες με την πρώτη σφαίρα να αποκτά ταχύτητα μέτρου υ_1=6m/s.

Η μεσαία σφαίρα έχει μετά την δεύτερη κρούση μόνο γωνιακή ταχύτητα περιστροφής μιας η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας του μηδενίστηκε εξαιτίας της δεύτερης κρούσης με την σφαίρα μάζας M_1.

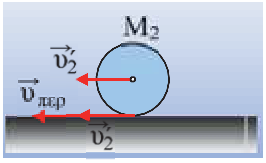
Β. Η αρχική κινητική ενέργεια της μεσαίας σφαίρας ήταν

$$K_{ολ}= ½ Mυ_{cm}^2 + ½ Iω^2=70J$$

Η κινητική ενέργεια της τρίτης σφαίρας είναι $K_3= ½ M_3υ_3^2=32J$

άρα το ποσοστό θα είναι Π=32·100/70=45,7%

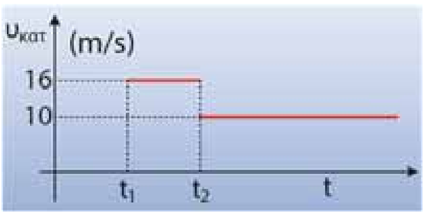
Γ. Η μεσαία σφαίρα αρχικά κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει άρα και η ταχύτητα του χαμηλότερου της σημείου θα είναι μηδενική μέχρι την στιγμή της πρώτης κρούσης. Μετά την πρώτη κρούση η σφαίρα κινείται προς τα αριστερά αλλά περιστρέφεται δεξιόστροφα άρα η συνολική της ταχύτητα θα είναι με βάση το σχήμα



θα είναι $υ_{ολ}= υ_2΄+υ_{περ}$=6m/s+10m/s= 16m/s

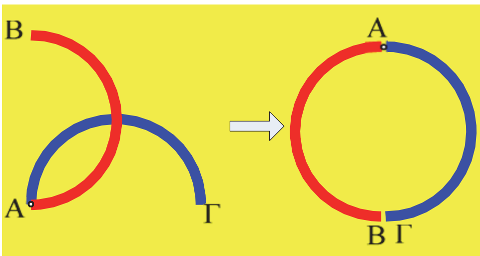
Μετά και τη δεύτερη κρούση η μεσαία σφαίρα μόνο περιστρέφεται άρα η μοναδική ταχύτητα που έχει το κατώτερο σημείο της σφαίρας είναι η $υ_{περ}$=10m/s

Έτσι το μέτρο της ταχύτητας του χαμηλότερου σημείου της μεσαίας σφαίρας θα δίνεται ποιοτικά από το παρακάτω σχήμα με την προϋπόθεση ότι η πρώτη κρούση έγινε την στιγμή t_1 και η δεύτερη κρούση έγινε την χρονική στιγμή t_2.



Κρούση ημικυκλίων

Τα δύο ημικύκλια του παρακάτω σχήματος μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Α. Η διάμετρος ΑΒ είναι κατακόρυφη ενώ η διάμετρο ΑΓ είναι οριζόντια. Το κάθε ημικύκλιο θεωρούμε ότι έχει μάζα M1=1Kg και όλη του η μάζα είναι συγκεντρωμένη σε ακτίνα R=1m. Αφήνουμε ελεύθερο το ένα ημικύκλιο και μετά από λίγο αφήνουμε ελεύθερο και το δεύτερο



ημικύκλιο με αποτέλεσμα τα δύο ημικύκλια να συγκρουστούν ταυτόχρονα και πλαστικά όταν έχουν τη μέγιστη κινητική τους ενέργεια. Να βρεθούν:

Α. Η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την πλαστική κρούση των δύο ημικυκλίων

Β. Το συνημίτονο της μέγιστης γωνίας που θα διαγράψει η κατακόρυφη διάμετρος ΑΒ των ημικυκλίων μετά την κρούση.

Δίνεται ότι το κέντρο μάζας ημικυκλίου βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας του σε απόσταση 4R/3π από το κέντρο του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Αν το ημικύκλιο ήταν ολόκληρο δαχτυλίδι θα είχε μάζα M=2Kg και ροπή αδράνειας του θα ήταν $I_{cm}=MR^2$. Επειδή όμως το σύστημα περιστρέφεται γύρω από το σημείο Α με την βοήθεια του κανόνα του Στάινερ θα είχαμε $I_A=MR^2+MR^2=2MR^2$. Επειδή όμως λείπει το μισό ημικύκλιο η συνολική ροπή αδράνειας για κάθε ημικύκλιο θα είναι $I_A=MR^2=2Kg.m^2$

Με τη βοήθεια του ΑΔΕ για το κάθε ημικύκλιο θα έχουμε

Για το ΑΒ $M_1g2R=½\, I_A\omega_1^2$ θα βρούμε $\omega=\sqrt{20}=4{,}47rad/sec$

Για το ΑΓ $M_1g\left(\frac{4R}{3\pi}+R\right)=½\, I_A\omega_2^2$ θα βρούμε ω=3,77rad/sec

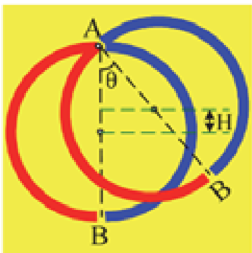
Για την κρούση των δύο ημικυκλίων θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ

$L_{αρχ}=L_{τελ}$ άρα $I_A.\omega_1-I_A.\omega_2=I_{ολ}\omega_{συστ}\rightarrow$

θα βρούμε $\omega_{συσ}=0{,}35rad/sec$

Αρα $K_{συσ}=½\, I_{ολ}\omega_{συσ}^2=0{,}245J$

Β. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του δαχτυλιδιού θα ισχύει:

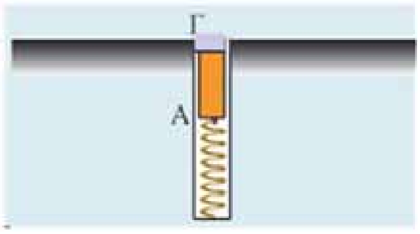


$K_{συσ}=U$ άρα 0,245=20H άρα H=0,01225m

άρα συνθ=(R-H)/R=0,98775

Κρούση και περιστροφή στον αέρα.

Ανοίγουμε μία κατακόρυφη οπή βάθους 50cm στο έδαφος. Μέσα στην οπή τοποθετούμε ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθερά K=400N/m και φυσικού μήκους L_o=50cm. Μία ράβδος ΑΓ με μήκος l=20cm έχει μάζα M=1kg. Με το άκρο Α της ράβδου πιέζουμε το ελατήριο έτσι ώστε να συμπιέσουμε το ελατήριο κατά x=7/32m όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

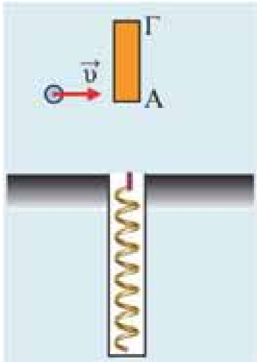


Αφήνουμε την ράβδο ελεύθερη και όταν η ράβδος φτάσει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς της ένα βλήμα μάζας m=0,25kg που κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ=5π m/s συγκρούεται με το άκρο Α της ράβδου. Μετά την κρούση το βλήμα πέφτει πάνω στο ελατήριο και κολλάει πάνω σε αυτό χωρίς απώλεια ενέργειας.

A. Να αποδείξετε ότι η κρούση είναι ελαστική
B. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου που θα προκληθεί από την πτώ- ση του βλήματος πάνω σε αυτό
Γ. Να αποδείξετε ότι η ράβδος πέφτοντας θα χτυπήσει στο έδαφος έχοντας ένα μόνο σημείο επαφής με αυτό.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου $I_{cm}=ML^2/12$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α. Για να χτυπήσει το βλήμα στο κατακόρυφο ελατήριο θα πρέπει μετά την κρούση με την ράβδο να κάνει ελεύθερη πτώση.

Αν εφαρμόσουμε ΑΔΟ και ΑΔΣ για το σύστημα θα έχουμε

$m \cdot \upsilon = M\upsilon_{cm}$ άρα $\upsilon_{cm}=1{,}25\pi$ m/s

$m\upsilon \cdot L/2 = I\omega$ άρα $\omega=37{,}5\pi$ r/s

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει απώλεια ενέργειας κατά την κρούση τότε με την βοήθεια της ΑΔΕ θα είχαμε:

$$\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} MU_{cm}^2 + Q_{\kappa\rho}$$

μετά από πράξεις το $Q_{\kappa\rho}=0$ άρα η κρούση είναι ελαστική.

Β. Αν πάρουμε ΑΔΕ για την άνοδο της ράβδου θα έχουμε

$\frac{1}{2} K \cdot x^2 = MgH_{cm}$ θα βρούμε ότι το ύψος που ανέβηκε το κέντρο μάζας της ράβδου είναι $H_{cm}=0{,}8$m, πάνω από το έδαφος.

Το βλήμα την στιγμή της κρούσης θα βρίσκεται σε $H_\beta=0{,}7$m

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πρώτη του βλήματος και μέχρι την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου θα έχουμε

$$mg(H_\beta + x_{max}) = \frac{1}{2} Kx_{max}^2 \text{ θα βρούμε το } x_{max}=0{,}1\text{m}$$

Γ. Η ράβδος μετά την κρούση της με το βλήμα εκτελεί μία ομαλή στροφική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας της και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της εκτελεί μία οριζόντια βολή προς τα κάτω. Όταν η ράβδος θα χτυπήσει στο έδαφος ή θα κτυπήσει ένα της σημείο ή θα χτυπήσουν όλα της τα σημεία πάνω στο έδαφος. Για να συμβεί το δεύτερο θα πρέπει η γωνία που θα διαγράψει κατά την πτώση της η ράβδος να δίνεται από τη σχέση

$\theta = \kappa\pi + \pi/2$ (1) με το κ να είναι ακέραιος αριθμός.

Αν υποθέσουμε ότι τελικά θα χτυπήσει όλη η ράβδος ταυτόχρονα στο έδαφος θα έπρεπε το κ να είναι ακέραιος.

Από την ελεύθερη πτώση του κέντρου μάζας της ράβδου

$$H_{cm} = \tfrac{1}{2} g t^2 \quad t = 0{,}4s.$$

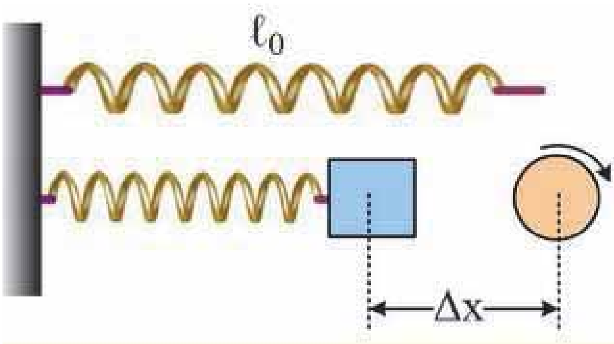
Από την ομαλή στροφική κίνηση της ράβδου

$\theta = \omega t = 37{,}5\pi \cdot 0{,}4 = 15\pi$ rad και από την σχέση (1) $\kappa = 14{,}5$.

Έτσι η ράβδος θα χτυπήσει τελικά με ένα της μόνο σημείο στο δάπεδο.

Κρούση περιστροφή και ταλάντωση

Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο μεγάλου μήκους και στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου του παρακάτω σχήματος μία σφαίρα μάζας M_2=3Kg και ακτίνας R=0,2m εκτελεί ελεύθερη ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0=10r/sec .



Συσπειρώνουμε το ελατήριο σταθεράς Κ κατά Δx και δένουμε στο ελατήριο κύβο μάζας M_1=1Kg που έχει το μήκος της ακμής του ίσο με τη διάμετρο της σφαίρας. Την στιγμή t=0 αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα ελατηρίου-κύβου. Η κρούση του κύβου με την σφαίρα που ακολουθεί είναι κεντρική - ελαστική και διαρκεί ελάχιστα. Μετά την κρούση ο χρόνος που χρειάζεται ο κύβος να κάνει μία πλήρη ταλάντωση είναι ίσος με το χρόνο που χρειάζεται η σφαίρα να κάνει μία πλήρη περιστροφή.
Η σφαίρα μετά την κρούση κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Α. Να δοθεί η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του κύβου από την θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά.

Β. Την εξίσωση που θα μας έδινε την απόσταση των δύο κέντρων μάζας των δύο σωμάτων μετά την κρούση τους.

Γ. Την ταχύτητα ενός σημείου Α της σφαίρας, που την στιγμή της κρούσης βρισκόταν σε επαφή με το έδαφος, την στιγμή που ο κύβος φτάνει για πρώτη φορά στην θέση ισορροπίας μετά την κρούση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να αρχίσει η σφαίρα να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο θα πρέπει να ισχύει η σχέση $U_{cm}=U_{περ}$ άρα $U_2{}'=ω_o.R=2m/sec$.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας θα προέλθει από την ελαστική κρούση με τον κύβο. Η κρούση είναι κεντρική έτσι οι δυνάμεις την στιγμή της κρούσης δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας να μην αλλάξει. Με τη βοήθεια των τύπων της ελαστικής κρούσης θα βρούμε την ταχύτητα του κύβου πριν την κρούση

$$U_2{}'=2M_1.U_1/(M_1+M_2) \text{ άρα } U_1=4m/sec.$$

Η περίοδος της περιστροφικής κίνησης της σφαίρας μετά την κρούση με την περίοδο ταλάντωσης του κύβου είναι ίσες.

Ετσι $T_{κυβου}=T_{σφαιρας}$ άρα $2π\sqrt{M_1/K}=2π/ω_o$ άρα $K=100N/m$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την αρχική κίνηση του κύβου θα έχουμε

$$½·K·A_1^2=½·M_1·U_1^2 \text{ άρα } A_1=0,4m$$

Μετά την κρούση η ταχύτητα του κύβου θα βρεθεί με την βοήθεια των τύπων της ελαστικής κρούσης

$$U_1'=(M_1-M_2)\cdot U_1/(M_1+M_2)=-2m/sec$$

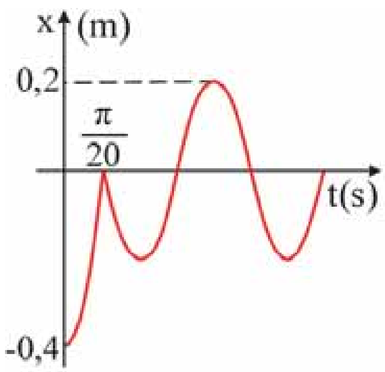
ο κύβος δηλαδή γυρίζει προς τα πίσω.

Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη γιατί ο κύβος βρίσκεται στη Θ.Ι.Τ.

Από την σχέση $U_{max}=\omega\cdot A_2$ θα βρούμε το $A_2=0,2m$

Ο κύβος λοιπόν θα εκτελέσει αρχικά ένα μέρος ΓΑΤ με πλάτος A_1 και στην συνέχεια μία δεύτερη ΓΑΤ με πλάτος A_2. Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι:

$$x=\begin{cases} 0{,}4\eta\mu(10t+3\pi/2 & 0\le t\le \pi/20 \\ 0{,}2\ \eta\mu[10(t-\pi/20)+\pi] & t\ge \pi/20 \end{cases} \qquad (S.I)$$



Β. Η σφαίρα θα εκτελεί ομαλή μεταφορική και στροφική κίνηση με σταθερή ταχύτητα $U_2'=2m/s$.Το διάστημα που θα διανύει η σφαίρα θα δίνεται από το νόμο του διαστήματος στη ομαλή μεταφορική κίνηση $S_2=U_2'.t'=2t'$ όπου $t'=t-\pi/20$ (S.I.)

Η απόσταση των δύο κέντρων μάζας των δύο σωμάτων θα δίνεται από την σχέση

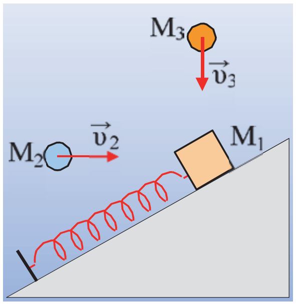
$D=2R+S_2-X= 0,4+2(t-\pi/20)- 0,2ημ[10(t-\pi/20)+\pi]$ με $t\geq\pi/20$ (S.I.)

Γ. Για να φτάσει ο κύβος στην θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά θα χρειασθεί χρόνος T/2. Στο ίδιο χρόνο το κατώτερο σημείο A της σφαίρα θα γίνει ανώτερο γιατί $T_{κυβου}=T_{σφαιρας}$

Έτσι η ταχύτητα του σημείου A θα είναι $U_A=2U_{cm}=4m/sec$.

Κρούση τριών σωμάτων.

Πάνω σε ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνία κλίσης $φ=30^o$ ισορροπεί σώμα μάζας $M_1=1kg$ με τη βοήθεια ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=100N/m$. Δύο σώματα με μάζες $M_2=M_3=1kg$ συγκρούονται ακαριαία πλαστικά και ταυτόχρονα την χρονική στιγμή $t=0$, το ένα κινούμενο με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_2=3\sqrt{3}m/s$ την στιγμή της κρούσης και το άλλο κινούμενα κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα την στιγμή της κρούσης μέτρου $υ_3=3m/s$.



Αν το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι $L_0=1,15$ m να βρεθούν:

Α. Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση καθώς και η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος εξαιτίας της πλαστικής κρούσης.

Β. Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος των τριών σωμάτων αν θετική φορά θεωρηθεί η φορά της ταχύτητας του συσσωματώματος.

Γ. Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος εξαιτίας του βάρους του αν το επίπεδο μηδενικής ενέργειας θεωρηθεί το οριζόντιο επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται το κεκλιμένο επίπεδο.

Δίνεται το $g=10m/sec^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με τη βοήθεια της ΑΔΟ στον παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο άξονα xx΄ θα έχουμε

$$M_2 \upsilon_2 συνφ - M_3 \upsilon_3 ημφ = (M_1+M_2+M_3)\upsilon_{συσ}$$

θα βρούμε μετά από πράξεις $\upsilon_{συσ}=1m/s$.

Η ΑΔΕ για την κρούση θα μας έδινε:

$$K_2+K_3=K_{συσ}+Q_{κρούσης}$$

άρα μετά τις πράξεις θα βρούμε $Q_{κρούσης}=16,5J$

Β. Από την αρχική ισορροπία του σώματος M_1 θα έχουμε $M_1 g ημφ = K x_1$ θα βρούμε $x_1=0,05m$. Μετά την πλαστική κρούση και πάλι από την ισορροπία του συστήματος των σωμάτων θα έχουμε $M_{ολ} g ημφ = K x_2$ θα βρούμε $x_2=0,15m$.

Με τη βοήθεια της ΑΔΕΤ για το σύστημα θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}M_{ολ}\upsilon_{συστ}^2+\frac{1}{2}K(x_2-x_1)^2=\frac{1}{2}KA^2$$

θα βρούμε $A=0,2m$.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα δίνεται από τη σχέση

$$x=Aημ(\omega t+\varphi_o).$$

Την στιγμή $t=0$ έχουμε $x=x_2-x_1=0,1m$ και $\upsilon>0$

άρα η εξίσωση θα έχει μορφή

$$x=0,2\cdot ημ\left(\frac{10}{\sqrt{3}}t+\frac{\pi}{6}\right)\ \text{(S.I.)}$$

Ετσι η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης θα έχει μορφή:

$$U = 2 \cdot \eta\mu^2\left(\frac{10}{\sqrt{3}}t + \frac{\pi}{6}\right)\text{(SI)}$$

Γ. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης απέχει απόσταση από το κάτω άκρο του ελατηρίου $D=L_0-x_2=1m$ ή η κατακόρυφη απόσταση από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας $H=D/2=0,5m$.

Η εξίσωση του ύψος του συσσωματώματος θα δίνεται από τη σχέση

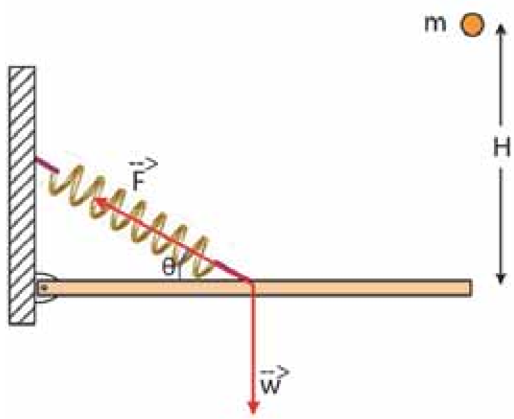
$$h = H + x\eta\mu\varphi = 0,5 + 0,1 \cdot \eta\mu\left(\frac{10}{\sqrt{3}}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (SI).}$$

Ετσι η δυναμική ενέργεια λόγω βάρους του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση:

$$U = M_{o\lambda}gh = 15 + 3 \cdot \eta\mu\left(\frac{10}{\sqrt{3}}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (SI)}$$

Μετά την κρούση το ελατήριο γίνεται κατακόρυφο.

Ομογενής ράβδος μάζας M=2Kg και μήκους L=2m ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια άρθρωσης και ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K=200N/m όπως στο παρακάτω σχήμα.



Το ελατήριο σχηματίζει γωνία $\theta=30^{o}$ με τον ορίζοντα στερεώνεται στο μέσο της ράβδου και η άλλη άκρη του βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με την άρθρωση. Από ύψος H πάνω από ένα άκρο της ράβδου αφήνεται σημειακό σώμα μάζας m=0,2Kg. Μετά την πλαστική κρούση του σώματος m με την ράβδο η ράβδος μόλις και φτάνει να γίνει κατακόρυφη.

A. Να βρεθεί το μέτρου του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδου-m αμέσως μετά την πλαστική κρούση.
B. Το ύψος πάνω από την ράβδο που αφέθηκε το μικρό σώμα m.
Γ. Πόση ελάχιστη μάζα θα μπορούσαμε να κολλήσουμε χωρίς αρχική ταχύτητα στο άκρο της ράβδου έτσι ώστε η ράβδος μόλις να διαγράψει γωνία 90^{o} ;

Δίνεται το $I_{\alpha}=1/3ML^{2}$.$\sqrt{3}\approx1{,}7$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Από την συνθήκη ισορροπίας για την ράβδο θα έχουμε

$$-MgL/2+F_{ελ}ημ30^o\ L/2=0$$

άρα $F_{ελ}$=40Ν έτσι $x_{ελ}$=0,2m.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα το μήκους του ελατηρίου θα πάρουμε $συν30^o=L/2/l_o+x$ άρα $l_o\approx 1$m.

Το μέτρου του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής για το σύστημα μετά την κρούση θα είναι

$$ΔL/Δt=\left|-MgL/2+F_{ελ}ημ30^o\ L/2-mgL\right|=4N\cdot m.$$

Β. Από την ΑΔΕ για την πτώση του σώματος m θα έχουμε

$$MgH=½\ M\cdot υ^2\ (1)$$

Από την ΑΔΣ για την κρούση θα πάρουμε $mυL=I_{ολ}\cdot ω_{συ}$ (2)

Από την ΑΔΕ για το σύστημα ράβδο-m μέχρι την τελική θέση θα έχουμε

$$W_B+U_{ελ}+K_{περ}+U_m=U_{ελ}{}' \rightarrow$$

$$MgL/2+1/2kx_{ελ}{}^2+1/2I_{ολ}\cdot ω_{συ}{}^2+mgL=1/2K\cdot x_{τελ}{}^2$$

$$\text{Το } I_{ολ}=1/3ML^2+mL^2=10,4/3\ kg\cdot m^2$$

το $x_{τελ}=(l_o+x)ημ30+L/2-l_o$ με αντικατάσταση:

$$2.10.2/2+½\ 200.0,2^2+1/2.10,4/3.ω^2{}_{συ}+0,2.10.2=$$

$$1/2\ .200(1,2.ημ30+2/2-1)^2$$

Θα πάρουμε

$$\omega_{\sigma\upsilon\sigma\tau}=\sqrt{60/13}\ r/sec.$$

Από της σχέση (2) θα έχουμε $0,2\cdot\upsilon\cdot 2=10,4/3.\sqrt{60/13}$

$$\text{Αρα}\ \ \upsilon=\sqrt{1040/3}\ m/sec.$$

Από την σχέση (1) θα έχουμε

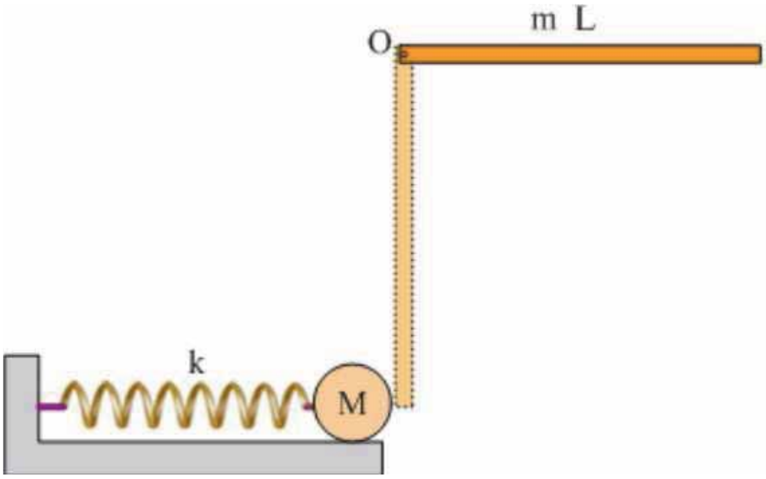
$$H=52/3\ m.$$

Γ. Αν υποθέσουμε ότι κολλάμε αυτόματα μία μάζα Μ΄στην άκρη της ράβδου χωρίς να της δώσουμε αρχική ταχύτητα η ΑΔΕ θα μας έδινε

$$MgL/2+1/2kx_{\varepsilon\lambda}^{2}+M'gL=1/2K.x_{\tau\varepsilon\lambda}^{2}$$
$$M'=0,6kg$$

Μια ελαστική κρούση και δυο ταλαντώσεις

Στο παρακάτω σχήμα η θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι η θέση όπου η ράβδος μήκους L και μάζας m είναι κατακόρυφη.



Η ράβδος είναι στερεωμένη με την βοήθεια οριζόντιου καρφιού που βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με την Θ.Φ.Μ.Ε και σε ύψος L πάνω από το άκρο του ελατηρίου.

Στην άκρη του ελατηρίου δένουμε σημειακό σώμα μάζας Μ και συμπιέζουμε το ελατήριο κατά Α από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αφήνουμε ταυτόχρονα το σώμα Μ και την ράβδο από την οριζόντια θέση και τα δύο σώματα συγκρούονται ελαστικά όταν η ράβδος γίνεται κατακόρυφη για πρώτη φορά και το σώμα Μ όταν φτάνει για πρώτη φορά στη θέση ισορροπίας του. Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται περιοδικά κάθε φορά που το σώμα Μ φτάνει στην ΘΦΜΕ όπως και την πρώτη φορά.

Να βρεθούν:

A. Η περίοδος των κρούσεων της ράβδου με το σώμα Μ μετά την πρώτη κρούση τους.
B. Ποια πρώτη σχέση πρέπει να έχουν μεταξύ τους τα Μ,m,L,Κ,Α για να υπάρχει το περιοδικό αυτό φαινόμενο.

Δίνεται για την ράβδο το $I_A=1/3.m.L^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Για να γίνει η πρώτη κρούση του σώματος Μ και της ράβδου πέρασε χρονικό διάστημα Τ/4 όπου $T=2\pi\sqrt{M/K}$ η περίοδος ταλάντωσης του σώματος Μ. Τόσο χρόνο έκανε και η ράβδος για να φτάσει στην κατακόρυφη θέση. Για να επαναλαμβάνεται το συγκεκριμένο γεγονός στην συγκεκριμένη θέση θα πρέπει η ράβδος και το σώμα να ξαναφτάνουν ταυτόχρονα στην ίδια θέση. Το σώμα Μ θα ξαναφτάνει στην ίδια θέση μετά από χρόνο Τ/2. Αυτός ο χρόνος είναι και η περίοδος των κρούσεων στην συγκεκριμένη θέση.
B. Τον ίδιο χρόνο Τ/2 θα χρειάζεται και η ράβδος για να ξαναφτάσει στην κατακόρυφη θέση. Ο χρόνος ανόδου της ράβδου θα είναι ίσος με τον χρόνο καθόδου αφού η ροπή του βάρους κατά την άνοδο και κάθοδο είναι ακριβώς η ίδια άρα και η στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση- επιβράδυνση της ράβδου θα ίσες κατά μέτρο είναι .Θα πρέπει λοιπόν η ράβδος να ξαναφτάνει στην αρχική της θέση άρα μετά την κρούση να έχει την αρχική γωνιακή ταχύτητα που είχε πριν την κρούση με το σώμα Μ.

   Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την ράβδο θα έχουμε:

$$m.g.L/2=1/2.I.\omega^2 \text{ άρα } \omega=\sqrt{3.g/L}$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική και η ράβδος διατηρεί το μέτρο της αρχικής της γωνιακής ταχύτητας θα πρέπει και το σημειακό σώμα Μ να διατηρεί το μέτρο της ταχύτητά του μετά την κρούση. Με την βοήθεια της ΑΔΣ για την παραπάνω κρούση θα έχουμε

$$I.\omega - M.U_{max}.L=-I.\omega+M.U_{max}.L$$

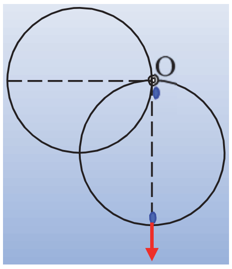
$$\text{άρα } I.\omega=M.U_{max}.L$$

$$\text{άρα } 1/3.m.L^2.\sqrt{3.g/L}=M.\sqrt{K/M}.A.L$$

$$\text{άρα } m^2.L.g/3=M.K.A^2.$$

Μια κρούση δακτυλιδιού.

Δαχτυλίδι μάζας M=2kg και ακτίνας R=1m μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από άκρο Ο της περιφέρειας του λεπτού δαχτυλιδιού. Εκτρέπουμε το δαχτυλίδι κατά γωνία $\theta=90^o$ από την θέση ισορροπίας του και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Την στιγμή που το δαχτυλίδι έχει αποκτήσει την μέγιστη κινητική ενέργεια του συγκρούεται στιγμιαία και πλαστικά με αυτό ένα δεύτερο σημειακό σώμα μάζας m=1 kg που έχει αφεθεί ελεύθερο από το άξονα Ο όπως στο παρακάτω σχήμα



Να βρεθούν:

Α. Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα του δαχτυλιδιού πριν την πλαστική κρούση

Β. Την απώλεια της ενέργειας του συστήματος δαχτυλίδι-σημειακό σώμα εξαιτίας της κρούσης

Γ. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σημειακού σώματος εξαιτίας της κρούσης

Δ. Την μέγιστη γωνία που θα διαγράψει το σημειακό σώμα μετά την κρούση

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η ροπή αδράνειας του δαχτυλιδιού είναι με βάση τον ορισμό της ροπής αδράνειας $I_{cm}=MR^2$ και με την βοήθεια του κανόνα του Στάινερ $I_o=MR^2+MR^2=4kg.m^2$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση του δαχτυλιδιού θα έχουμε

$MgR=\frac{1}{2} I_o\omega^2$ μετά τις πράξεις θα έχουμε $\omega=\sqrt{10}$ r/s

Β. Με την βοήθεια την ΑΔΣ για την κρούση του σημειακού σώματος με το δαχτυλίδι θα έχουμε

$L_{αρχ}=L_{τελ}$ άρα $I_o\omega=I_{τελ}\omega_{τελ}$ άρα θα βρούμε

$\omega_{τελ}=\sqrt{10}/2$ r/s

Με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε

$\frac{1}{2} I_o\omega^2 +mg2R=1/2\, I_{τελ}\omega_{τελ}^2 +Q_{κρ}$ άρα μετά τις πράξεις

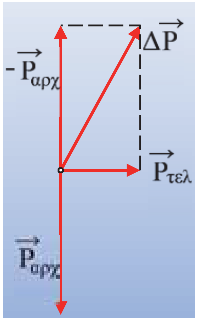
$Q_{κρ}=30J$

Γ. Το μέτρο της ορμής του σημειακού σώματος πριν την κρούση είναι

$P_{αρχ}=mu_{αρχ}=m\sqrt{g4R}=\sqrt{40}$ kgm/s

Ενώ το μέτρο της τελικής ορμής του σημειακού σώματος αμέσως μετά την κρούση είναι

$P_{τελ}=m\omega_{τελ}2R=\sqrt{10}$ kgm/s



Και με την βοήθεια του πυθαγόρειου θεωρήματος θα έχουμε

$$\Delta P = 5\sqrt{2}\ kgm/s$$

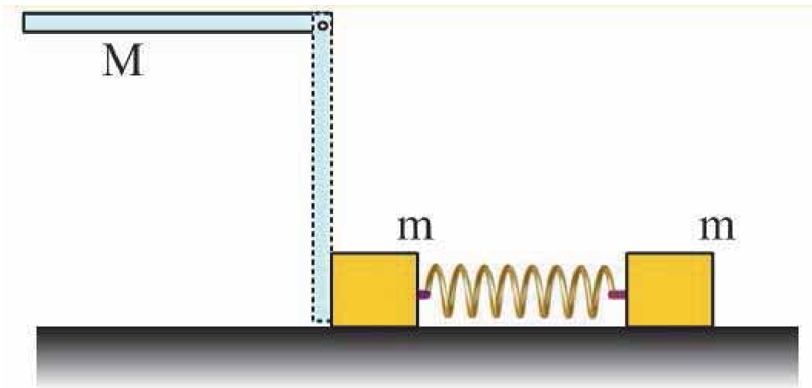
Δ. Με την βοήθεια της ΑΔΕ και μέχρι τη στιγμή που το στερεό θα σταματήσει θα έχουμε

$$½\, I_{τελ}\omega_{τελ}^{2} = Mgh_1 + mgh_2$$

με $h_1 = R – Rσυνφ$ και $h_2 = 2R - 2Rσυνφ$ και μετά από τις πράξεις θα βρούμε συνφ=0,75

Μια κρούση και ράβδου και ένα μηχανικό σύστημα με Doppler

Ράβδος μάζας M=3Kg και μήκους L=1,2m αφήνεται από την οριζόντια θέση. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται από το ένα της άκρο γύρω από οριζόντιο άξονα. Όταν ράβδος γίνει κατακόρυφη συγκρούεται με ακίνητο σώμα μάζας m=1Kg που ισορροπεί στο οριζόντιο λείο δάπεδο δεμένο με ελατήριο σταθεράς K που το άλλο του άκρο είναι στερεωμένο σε άλλο σώμα μάζας m=1Kg. Μετά την κρούση της ράβδου με το σώμα μάζας m η ράβδος παραμένει ακίνητη. Στο πρώτο σώμα είναι στερεωμένη πηγή ηχητικών ήχων συχνότητας F_s=680Hz ενώ στο δεύτερο σώμα m υπάρχει στερεωμένος ανιχνευτής ήχων.



Να βρεθούν :

A. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου πριν την κρούση καθώς και η ταχύτητα μετά την κρούση με τη ράβδο του σώματος m. Πως μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την κρούση της ράβδου με το σώμα m;

Β. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συχνότητας που θα ανιχνεύσει ο ανιχνευτής ήχων που βρίσκεται στο δεύτερο σώμα m.

Γ. Ποιο το μέγιστο ποσοστό της κινητικής ενέργειας της ράβδου λίγο πριν την κρούση που μπορεί να αποθηκεύσει το ελατήριο κατά την διάρκεια της κίνησης των δύο σωμάτων με μάζες m. Ποια είναι τότε η συχνότητα που ανιχνεύει ο ανιχνευτής;

Για την ράβδο $I_A=1/3ML^2$. Δίνεται η ταχύτητα του ήχου $υ_{ηχ}=340m/sec$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της ράβδου θα βρούμε:

$$M \cdot g \cdot L/2 = ½\, I \cdot ω^2$$

θα βρούμε $ω=5r/s$.

Με την βοήθεια της ΑΔΣ για την κρούση θα έχουμε $I \cdot ω = m \cdot υ \cdot L$ άρα $υ=6m/sec$.

Η $K_{ραβ}= ½\, Iω^2=18J$ η κινητική ενέργεια του σώματος

$$Km= ½\, m \cdot υ^2=18J$$

παρατηρούμε δηλαδή ότι δεν χάθηκε ενέργεια κατά την κρούση. Θα μπορούσαμε δηλαδή να χαρακτηρίσουμε την κρούση ελαστική.

Β. Επειδή τα δύο σώματα που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους έχουν ίδιες μάζες και η «κρούση» μεταξύ τους μπορεί να θεωρηθεί ελαστική τα σώματα συνεχώς θα ανταλλάσουν ταχύτητες από 0m/sec σε 6m/sec και από 6m/sec σε 0m/sec με βάση την θεωρία για τα σώματα που συγκρούονται ελαστικά και έχουν ίσες μάζες. Ετσι θα επαναλαμβάνεται το φαινόμενο περιοδικά. Η συχνότητα που θα ανιχνεύει ο ανιχνευτής θα δίνεται από τη σχέση με βάση τον τύπο του Doppler:

$$F_{παρατηρητή}=(340-υ_1)\cdot 680/(340-υ_2).$$

Ο παρατηρητής θα θέλει να ξεφύγει από την πηγή και η πηγή θα θέλει να πλησιάσει τον παρατηρητή….

Με τις ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$ να παίρνουν τιμές από 0 έως 6m/sec.

Η μέγιστη συχνότητα που θα ανιχνεύει ο ανιχνευτής θα είναι όταν ο ανιχνευτής είναι ακίνητος και η πηγή πλησιάζει με ταχύτητα υ=6m/s άρα $F_{max}=340.680/(340-6)\approx 692,2Hz$ και η ελάχιστη συχνότητα θα είναι όταν ο ανιχνευτής απομακρύνεται με ταχύτητα υ=6m/sec και η πηγή είναι ακίνητη. $F_{min}=(340-6)680/340=668Hz$

Γ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα γίνει μέγιστη όταν η απόσταση των δύο σωμάτων θα γίνει η ελάχιστη αυτό θα συμβεί όταν οι δύο ταχύτητες των σωμάτων γίνουν ίσες. Με την βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε $m\cdot υ=2m\cdot υ_{κοινή}$ άρα $υ_{κοινή}=3m/sec$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε:

$$½m\cdot υ^2=½\,2m\cdot υ_{κοινή}^2+U_{ελmax} \quad άρα\ U_{ελmax}=9J.$$

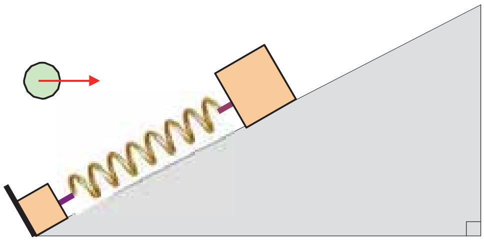
Αρα το μέγιστο ποσοστό της κινητική ενέργειας της ράβδου που έγινε δυναμική ενέργεια είναι $Π=U_{ελmax}.100\%/K_{ραβ}=50\%$.

Επειδή το μέγιστο ποσοστό αποθήκευσης στο ελατήριο συμβαίνει όταν τα σώματα έχουν ίδιες ταχύτητες η συχνότητα θα είναι

$$F_{παρ}=F_{πηγ}=680Hz.$$

Μια κρούση με Doppler

Πάνω σε ένα λείο κεκλιμένο γωνίας κλίσης $\varphi=30^{o}$ και στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου βρίσκεται σώμα μάζας M_1 που συνδέεται με ελατήριο σταθεράς K=100N/m. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο δεύτερο σώμα μάζας M_2= 1Kg όπως στο σχήμα.

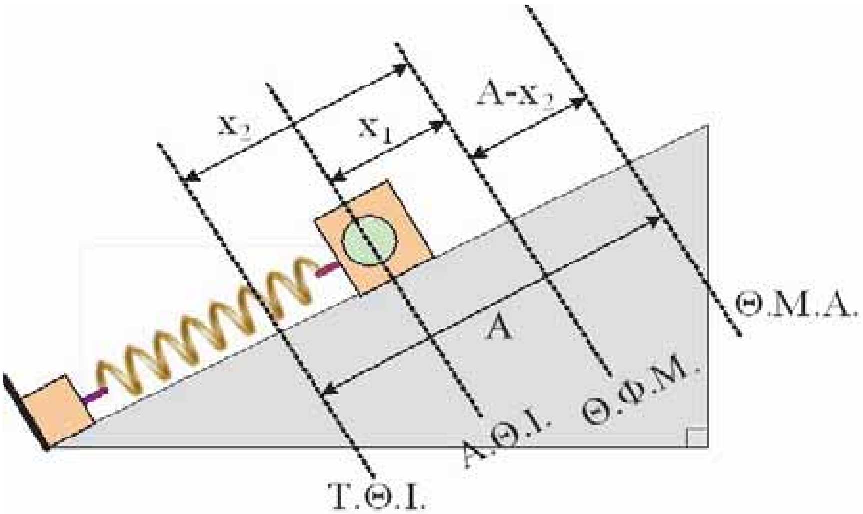


Ένα τρίτο σώμα κινείται οριζόντια με ταχύτητα $U=\sqrt{3}$m/sec έχει μάζα M_3=2Kg σφηνώνεται στο σώμα μάζα M_2. Το σώμα μάζας M_1 έχει ενσωματωμένη πάνω του μία πηγή παραγωγής ήχων με συχνότητα F_s=680Hz. Μετά την πλαστική κρούση των δύο σωμάτων το σώμα M_1 μόλις και δε χάνει την επαφή του με το κάθετο τμήμα της βάσης του κεκλιμένου επιπέδου. Να βρεθούν :

Α. Το πλάτος ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα
Β. Η μάζα M_1
Γ. Η εξίσωση της συχνότητας που καταγράφει ένας ανιχνευτής ήχων που βρίσκεται στο σώμα M_2 που δεν καταστρέφεται από την πλαστική κρούση.
Δ. Η γραφική παράσταση της συχνότητας με το χρόνο

Δίνεται το $U_{\eta\chi}$=340m/sec.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α. Για την ισορροπία του σώματος M_2 πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο θα έχουμε:

$$M_2 \cdot g \cdot ημφ = K \cdot x_1 \text{ άρα } x_1 = 0{,}05m$$

Για την κρούση των δύο σωμάτων και για το άξονα χχ΄παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο θα έχουμε $M_3 \cdot U \cdot συνφ = (M_3 + M_2) U_{συστ}$ άρα

$$U_{συστ} = 1m/sec$$

Εχουμε αλλαγή της μάζας του συστήματος άρα και αλλαγή της θέσης ισορροπίας. Για την νέα θέση ισορροπίας του συστήματος M_2-M_3 θα ισχύει:

$$(M_2+M_3)\cdot g\cdot ημφ=K\cdot x_2 \text{ άρα } x_2=0{,}15m.$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για μετά την κρούση ταλάντωση του συστήματος θα έχουμε

$$½ D(x_2-x_1)^2 + ½ (M_2+M_3)\cdot U_{συστ}^{\,2}=½ D\cdot A^2 \quad \text{άρα } A=0{,}2m$$

Β. Αφού η επαφή του M_1 μόλις και χάνεται με το κάθετο τμήμα του κεκλιμένου επιπέδου σημαίνει ότι όταν το σύστημα θα φτάσει στην θέση μέγιστη απομάκρυνσης εκείνη τη στιγμή το σώμα M_1 θα είναι έτοιμο να κινηθεί δηλαδή η

$$F_{ελ}=M_1 g.ημφ \text{ άρα:}$$

$$K(A-x_2)=M_1.g.ημφ$$

$$100.0{,}05=M_1.10.0{,}5 \text{ άρα } M_1=1Kg$$

Γ. Η εξίσωση της ταχύτητα ταλάντωσης του συστήματος M_2-M_3 θα έχει μορφή $U=ω\cdot Aσυν(ωt+φ_o)$ με $ω=\sqrt{K/M_{ολ}}$

άρα $ω=10\sqrt{3}/3$ r/sec τη στιγμή t=0 βρίσκεται στην θέση

$x=x_2-x_1=0{,}1m$ $U>0$ άρα $φ_o=π/6$ θα έχουμε εξίσωση:

$$υ=2\sqrt{3}/3συν(10\sqrt{3}/3t+π/6) \text{ (S.I.)}$$

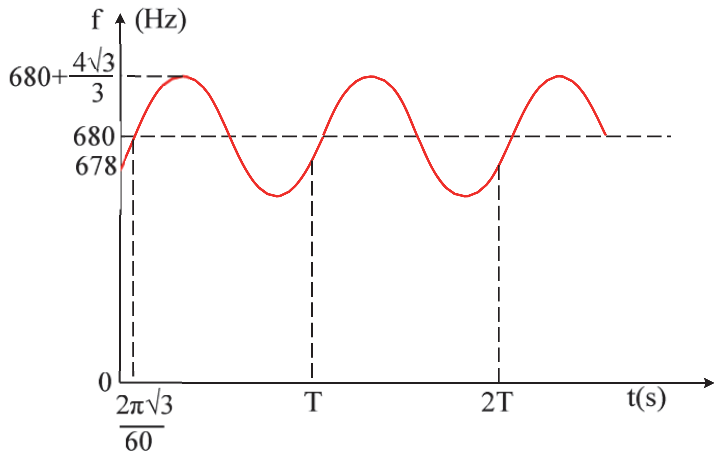
Η εξίσωση της συχνότητας που ανιχνεύει ο ανιχνευτής ήχου θα είναι:

$$F_A=\{340-2\sqrt{3}/3συν(10\sqrt{3}/3t+π/6)\}\cdot 680/340=$$

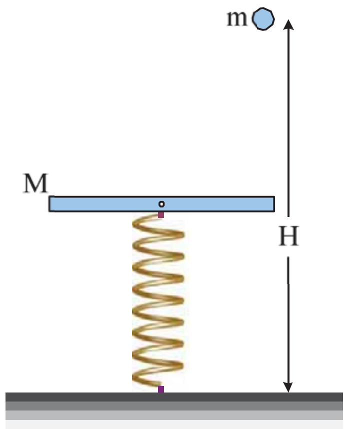
$$680-4\sqrt{3}/3συν(10\sqrt{3}/3t+π/6) \text{ (S.I.)}$$

Δ. Το σώμα για να φτάσει από την θέση χ=Α/2 στην θέση x=Α θα χρειασθεί χρόνο Τ/6 όπου Τ η περίοδος ταλάντωσης του συστήματος.

Ετσι η γραφική παράσταση θα έχει μορφή



Μια κρούση με ταλάντωση και στροφική κίνηση.



Στο παραπάνω σχήμα το κατακόρυφο ελατήριο έχει σταθερά K=400N/m και φυσικό μήκος L_o=0,9m. Η οριζόντια πολύ λεπτή και ελαστική ράβδος έχει μήκος L=1m, μάζα M και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο καρφί που είναι στερεωμένο στο ανώτερο σημείο του ελατηρίου. Ένα μικρό σώμα μάζας m αφήνεται από τον Βασίλη, που σκέφτηκε αυτή την άσκηση, σε απόσταση H=1,6m από το έδαφος και μετά την ελαστική στιγμιαία κρούση με το ένα άκρο της εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Α. Ποια η σχέση των δύο μαζών που συγκρούονται ελαστικά;

Β. Αν m=1Kg, κινδυνεύει η οριζόντια ράβδος να συγκρουστεί με το έδαφος;

Γ. Πόσες περιστροφές έχει διαγράψει η ράβδος όταν το μικρό σώμα φτάνει στο έδαφος;

Δ. Ποια η ταχύτητα του άκρου της ράβδου όπου έγινε η κρούση, όταν για πρώτη φορά η ράβδος γίνεται στιγμιαία κατακόρυφη;

Δίνεται ότι το ελατήριο παραμένει συνεχώς κατακόρυφο, $g=10m/s^2$ ενώ για τη ράβδο $I_{cm}=ML^2/12$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με τη βοήθεια της ΑΔΟ για το σύστημα θα έχουμε $m \cdot \upsilon = M \cdot \upsilon_{cm}$ (1)

Με τη βοήθεια της ΑΔΣ γύρω από τον άξονα περιστροφής της ράβδου

$$M \cdot \upsilon \cdot L/2 = I_{cm}\omega \text{ άρα } \omega = \frac{6m\upsilon}{ML} \quad (2)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική από την ΑΔΕ για το σύστημα θα έχουμε

$$½\, m \cdot \upsilon^2 = ½\, M \cdot \upsilon_{cm}^2 + ½\, I_{cm}\omega^2$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (1) και (2) θα πάρουμε $M=4m$.

Β. Το ελατήριο με τη ράβδο ισορροπούν άρα ισχύει η σχέση

$$K \cdot x_1 = M \cdot g \text{ άρα } x_1 = 0{,}1m$$

Έτσι η ράβδος ισορροπεί σε ύψος $L_0 - x_1 = 0{,}8m$. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της σφαίρα θα έχουμε $m \cdot g \cdot (H - L_0 + x_1) = ½\, m \cdot \upsilon^2$ άρα $\upsilon = 4m/s$ και με τη βοήθεια της σχέσης (1) $\upsilon_{cm} = 1m/s$ και της σχέσης (2) $\omega = 6r/s$

Η ράβδος θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση γύρω από το οριζόντιο καρφί που είναι δεμένο στο ελατήριο και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της ράβδου θα εκτελεί γατ με μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας $(\upsilon_{cm})_{max} = 1m/s$ και άρα πλάτους $A = (\upsilon_{cm})_{max}/\omega = 0{,}1m$. Το κέντρο μάζας της ράβδου εκτελεί γατ με πλάτος $A=0{,}1m$ άρα το χαμηλότερο σημείο του απέχει από το έδαφος είναι $L_0 - x_1 - A = 0{,}7m$ που είναι μεγαλύτερο από το $L/2$ άρα η ράβδος δεν κινδυνεύει να χτυπήσει σε αυτό.

Γ. Η μάζα m εκτελεί ελεύθερη πτώση άρα θα φτάσει στο έδαφος σε χρόνο t′ που θα βρεθεί από τη σχέση $H' = \frac{1}{2} g \cdot t'^2$ άρα t′=0,4s. Επομένως στον χρόνο αυτό η ράβδος θα έχει διαγράψει

$$N=\theta/2\pi=\omega.t'/2\pi=1{,}2/\pi \text{ περιστροφές.}$$

Δ. Για να γίνει η ράβδος κατακόρυφη για πρώτη φορά θα πρέπει να περάσει χρόνος $t_0=\theta/\omega=\pi/12$sec. Την στιγμή αυτή το κέντρο μάζας άρα και οποιαδήποτε σημείο της ράβδου θα έχει κατακόρυφη ταχύτητα που θα δίνεται από την σχέση $\upsilon_\psi=(\upsilon_{cm})_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t_0$ (αν δεχθούμε ως θετική φορά την προς τα κάτω) άρα

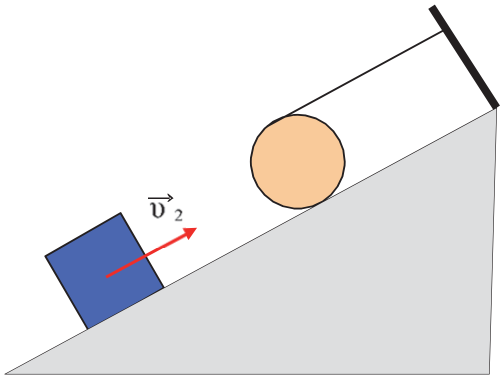
$$\upsilon_\psi=1\sigma\upsilon\nu 10\pi/12=-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ m/s.}$$

Έτσι η συνολική ταχύτητα του άκρου της ράβδου θα δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής ταχύτητας λόγω περιστροφής $\upsilon_x=\omega L/2$ αλλά και της κατακόρυφης ταχύτητας υ_ψ λόγω της γατ.

Έτσι $\upsilon_{o\lambda}=\sqrt{9{,}75}$ m/s.

Μια νέα κρούση κυλίνδρου και κύβου.

Ο κύλινδρος του παρακάτω σχήματος έχει μάζα M=2Kg και ακτίνα R=0,2m.Το νήμα μπορεί να ξετυλίγεται από το κύλινδρο και να είναι συνεχώς παράλληλο και τεντωμένο με το κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ (ημφ=0,8) που παρουσιάζει συντελεστή τριβής μ=0,5 με τον κύλινδρο.



Την στιγμή t=0 αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα και ο κύλινδρος αρχίζει να κατέρχεται περιστρεφόμενος δεξιόστροφα, ενώ η ταχύτητα (ως προς ακίνητο παρατηρητή) του σημείου επαφής με το νήμα, της κάθετης στο επίπεδο διαμέτρου είναι συνεχώς μηδενική. Την στιγμή t=3sec το νήμα κόβεται και ο κύλινδρος συγκρούεται κεντρικά μετωπικά και ελαστικά με κύβο μάζας M=2Kg ακμής α=0,4m που ανέρχεται με ταχύτητα μέτρου U_2. Αν μετά την κρούση που διαρκεί ελάχιστα ο κύλινδρος αρχίζει αμέσως να κυλίεται χωρίς να περιστρέφεται ανερχόμενος να βρεθούν :

A. Το μέτρο της ταχύτητας του κύβου την στιγμή της κρούσης
B. Την απόσταση των κέντρων μάζας των δύο στερεών όταν ο κύλινδρος σταματήσει για πρώτη φορά μετά την κρούση.

Γ. Θα μπορέσουν τα δύο σώματα να ξανασυγκρουστούν για δεύτερη φορά ή όχι;

Για τον κύλινδρο $I_{cm}=0,5.M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Απο τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και στροφική κίνηση του κυλίνδρου θα έχουμε

$$M.g\eta\mu\varphi - T - T_{o\lambda} = M.a \ (1)$$

$$T.R - T_{o\lambda}.R = 0,5.M.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu} \ (2)$$

Επειδή το σημείο επαφής με το κεκλιμένο επίπεδο έχει συνεχώς (πριν κοπεί το νήμα) ταχύτητα 2 U_{cm} θα δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης $T_{o\lambda}=\mu.N=\mu.M.g\sigma\upsilon\nu\varphi=6N$ (3)

Από τις σχέσεις (1) ,(2) και (3) θα βρούμε μετά από πράξεις

$$a=4/3m/sec^2.$$

Από το νόμο της ταχύτητας για την επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση $U=a.t_1=4m/sec$.

Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική άρα τα δύο σώματα που έχουν ίδιες μάζες θα πρέπει να ανταλλάξουν ταχύτητες. Ο κύλινδρος όμως πρέπει μετά την κρούση να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει προς τα πάνω. Ετσι το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο πρέπει να έχει συνολική ταχύτητα μηδέν. Η ταχύτητα περιστροφής είναι $U_{\pi\varepsilon\rho}=4m/sec$ έχει φορά προς τα κάτω και η κρούση δεν θα επηρεάσει την στροφική κίνηση του κυλίδρου μιας και οι δυνάμεις επαφής είναι κεντρικές και δεν προκαλούν ροπή. Η ταχύτητα μεταφοράς μετά την κρούση πρέπει και αυτή να έχει μέτρο 4m/sec και φορά προς τα πάνω. Αυτή θα πρέπει να είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου μετά την κρούση. Ετσι και ο κύβος είχε πριν την κρούση ταχύτητα U_2=4m/sec.

Β. Από του νόμους τώρα της κίνησης για την περιστροφική και μεταφορική κίνηση θα έχουμε

$$M.g.ημφ-T_{στ}=M.a_2 \quad (4)$$

$$T_{στ}.R=0,5.M.R^2.α_{γων2} \quad (5)$$

μετά από πράξεις a_2=16/3m/sec^2 και $T_{στ}$=16/3 N

Πρέπει όμως να δούμε αν ισχύει και η συνθήκη κύλισης της σφαίρας δηλαδή $T_{στ}<μ.N$.

Δηλαδή 16/3<0,5.2.10.0,6 άρα 16/3<6 που ισχύει άρα ο κύλινδρος κυλίεται και προς την άνοδο και προς την κάθοδο γιατί οι δυνάμεις δεν αλλάζουν και για την κάθοδο. Ο κύβος εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα U_o=4m/sec και επιτάχυνση που θα βρεθεί από το νόμο της κίνησης

$$M.g.ημφ-μ.M.g.συνφ=M.a_3 \quad άρα \quad a_3=5m/sec^2.$$

Για την κίνηση του κυλίνδρου και από τους νόμους της ταχύτητας και του διαστήματος θα έχουμε $U=U_o-a_2.t_2$

άρα t_2=0,75sec $S_1=U_o.t_2-1/2.a_2.t_2^2$=1,5m.

Στον ίδιο χρόνο t_2 ο κύβος θα έχει κινηθεί

$$S_2 = U_o.t_2 + 1/2.a_3.t_2^2 = 4{,}40625m.$$

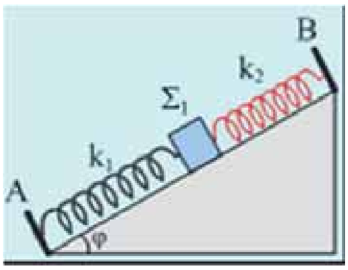
Αρα η απόσταση των κέντρων μάζας των δύο στερεών θα είναι

$$D = R + \alpha/2 + S_1 + S_2 = 6{,}30625m$$

Γ. Μόλις ο κύλινδρος σταματήσει στιγμιαία θα αρχίσει να κυλίεται κατερχόμενος με επιτάχυνση και πάλι $a_2=16/3m/sec^2$ που είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του κύβου $a_3=5m/sec^2$.
Ετσι μετά από λίγο και εφόσον το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου επαρκεί τα δύο στερεά θα ξανασυγκρουστούν.

Μια παραλλαγή με κρούση

Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $\varphi=30^{o}$. Στα σημεία Α και Β στερεώνουμε τα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1=100N/m$ και $k_2=20N/m$ αντίστοιχα. Ανάμεσα στα δύο ελατήρια κρατάμε χωρίς να δένουμε (με τα ελατήρια) το σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1=2kg$ στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (όπως φαίνεται στο σχήμα). Κάποια στιγμή εκτοξεύουμε το σώμα $Σ_1$ με αρχική ταχύτητα $υ_o=2m/sec$ με φορά προς το σημείο Α.



Α. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$.

Κάποια άλλη χρονική στιγμή αφήνουμε ελεύθερο από ύψος $H=0,8m$ πάνω από την αρχική θέση του σώματος $Σ_1$ ένα δεύτερο σώμα πάνω στην ίδια κατακόρυφο που περνάει από το σώμα $Σ_1$. Ενώ το σώμα $Σ_1$ βρίσκεται στην αρχική του θέση και κινείται προς το σημείο Β το δεύτερο σώμα μάζας $m_2=2kg$ σφηνώνεται ακαριαία πέφτοντας κατακόρυφα στο σώμα $Σ_1$.

Β. Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

Γ. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των ενεργειών των δύο ελατηρίων σε συνάρτηση με το χρόνο θεωρώντας στιγμή $t=0$ την στιγμή της κρούσης των δύο σωμάτων.

Δίνεται $\sqrt{0,65} = 0,8$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Αν το σώμα $Σ_1$ ήταν δεμένο με το ελατήριο σταθεράς K_1 θα ισορροπούσε σε απόσταση x_1 από την αρχική θέση που θα δινόταν από την σχέση $m_1gημφ=K_1x_1$ άρα $x_1=0,1m$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ θα έχουμε

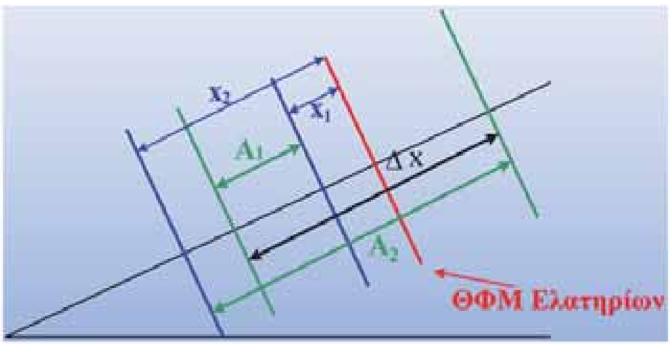
$$\frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}k_1A_1^2$$

θα βρούμε μετά τις πράξεις $A_1=0,3m$. Αν το σώμα $Σ_1$ ήταν δεμένο με το ελατήριο σταθεράς k_2 θα ισορροπούσε σε απόσταση x_2 από την αρχική θέση που θα δινόταν από την σχέση $m_1gημφ=k_2x_2$ άρα $x_2=0,5m$. Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ θα έχουμε

$$\frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}k_2A_2^2$$

θα βρούμε μετά τις πράξεις $A_2=0,8m$

Με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος η απόσταση των θέσεων όπου το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα είναι $Δχ=0,7m$



Β. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση του δεύτερου σώματος θα έχουμε $m_2gH= ½ m_2\upsilon_2^2$ θα βρούμε $\upsilon_2=4m/s$

Αν εφαρμόσουμε ΑΔΟ στον άξονα της κίνησης του σώματος $Σ_1$ θα έχουμε

$$m_1υ_o - m_2υ_2ημφ = (m_1+m_2)υ_{συσ}$$ θα βρούμε $υ_{συσ}=0m/s$.

Γ. Η αλλαγή της μάζας του συστήματος θα επιφέρει και αλλαγή στην θέση ισορροπίας ταλάντωσης για την νέα θέση θα ισχύει

$$(m_1+m_2)gημφ = k_1x_3 \quad \text{άρα } x_3=0{,}2m$$

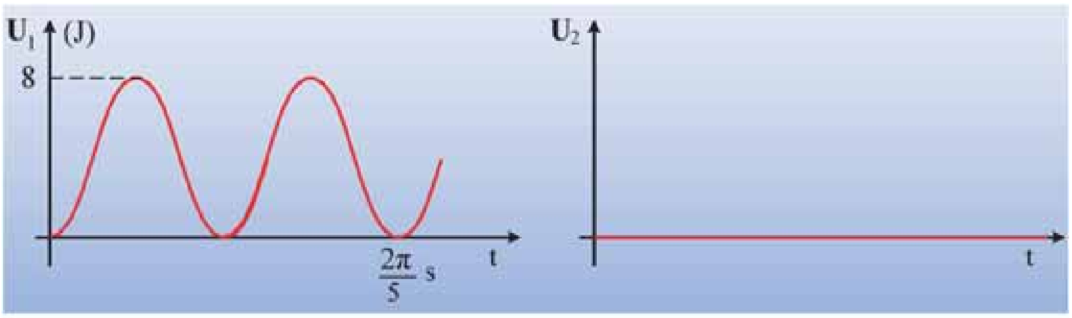
Επειδή την στιγμή της κρούσης το σύστημα δεν έχει ταχύτητα το x_3 θα ταυτίζεται με το νέο πλάτος ταλάντωσης του συστήματος. Η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος θα δίνεται από τη σχέση

$$x=0{,}2ημ\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)\ (S.I)$$

Η ενέργεια του ελατηρίου με σταθερά k_1 θα δίνεται από τη σχέση

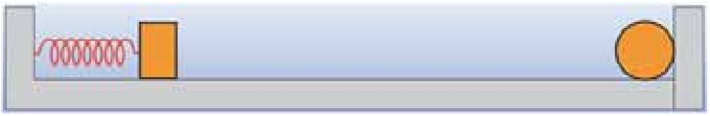
$$U_{ελ1}=\frac{1}{2}k_1x_{ελ1}^2 = 50\left(0{,}2-0{,}2ημ\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$$

Το δεύτερο ελατήριο είναι συνεχώς στο φυσικό μήκος του μιας και η ανώτερη θέση ταλάντωσης του συστήματος ισοδυναμεί με φυσικό μήκος του δεύτερου ελατηρίου. Ετσι οι γραφικές παραστάσεις των ενεργειών των δύο ελατηρίων θα είναι



Πού θα γίνει η κρούση

Λείος κύβος ακμής $\alpha=2R=0,4m$ και μάζας $M_1=3Kg$ είναι δεμένος με ιδανικό ελατήριο φυσικού μήκους $L_0=0,5$ m και σταθεράς $K=300\pi^2 N/m$ η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο σε κατακόρυφο τοίχο. Λεία σφαίρα ακτίνας $R=0,2m$ και μάζας $M_2=3Kg$ είναι ακίνητη στην άλλη άκρη του οριζόντιο λείου δαπέδου και σε επαφή με κατακόρυφο τοίχο όπως στο παρακάτω σχήμα.



Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά $x_1=0,1$ m και την στιγμή $t=0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο ενώ την ίδια στιγμή δίνουμε στο κέντρο μάζας της σφαίρας ταχύτητα μέτρου $u_{cm}=\pi\sqrt{3}$ m/s και κατάλληλη γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε να αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πλησιάζοντας τον κύβο. Η κρούση των δύο στερεών είναι κεντρική και ελαστική και διαρκεί ελάχιστο χρόνο όπως επίσης και η κάθε κρούση της σφαίρας με τον κατακόρυφο τοίχο. Αν η κρούση των δύο στερεών συμβεί σε τέτοια θέση όπου ο κύβος φτάνει για πρώτη φορά μετά την στιγμή $t=0$ και μετά την κρούση τους ο κύβος εκτελεί ταλάντωση με το μέγιστο δυνατό πλάτος να βρεθούν:

Α. Το οριζόντιο μήκος του δωματίου

Β. Το είδος της κίνησης του κάθε σώματος ξεχωριστά και να βρεθεί η περίοδος του φαινομένου

Γ. Η γραφική παράσταση του μέτρου της ταχύτητας του ανώτερου σημείου της σφαίρας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να εκτελεί ο κύβος ταλάντωση με το μέγιστο δυνατό πλάτος θα πρέπει να πάρει από τη σφαίρα την μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα ενέργειας. Αυτό θα συμβεί μόνο αν η σφαίρα μείνει ακίνητη μεταφορικά. Η στροφική κατάσταση της σφαίρας δεν μπορεί να αλλάξει μιας και όλες οι κρούσεις είναι κεντρικές και οι δυνάμεις επαφής δεν μπορούν να προκαλέσουν στην διάρκεια της κρούσης καμία ροπή καθώς επίσης δεν μπορούν να αναπτυχθούν τριβές μιας και τα στερεά είναι λεία. Επειδή τα στερεά έχουν ίδιες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Έτσι η ταχύτητα του κύβου θα πρέπει να έχει μέτρο μηδέν την στιγμή της κρούσης. Θα πρέπει να βρίσκεται δηλαδή σε ακραία θέση της ταλάντωσή του. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στην θέση +Α μιας και φτάνει στην θέση αυτή για πρώτη φορά μετά την χρονική στιγμή t=0. Ο χρόνος για να φτάσει εκεί θα είναι $t_1=T/2=0{,}1sec$. Στο ίδιο χρόνο η σφαίρα εκτελεί ομαλή μεταφορική και στροφική κίνηση διανύοντας το κέντρο μάζας του απόσταση $S=u_{cm}T/2=0{,}1\pi\sqrt{3}\,m$

Το μήκος του δωματίου θα είναι

$$S_{ολ}=L_0+A+a+2R+S=1{,}5+0{,}1\pi\sqrt{3}\approx 2\ m$$

Β. Η σφαίρα αρχικά κυλιέται μέχρι να γίνει η πρώτη σύγκρουση με τον κύβο ενώ ο κύβος εκτελεί μέρος γ.α.τ. από την ακραία αρχική του θέση -Α μέχρι την +Α αυτό διαρκεί αρχικό χρόνο $\Delta t_1=T/2=0{,}1s$. Στην συνέχεια ο κύβος συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα με αποτέλεσμα να ανταλλάξουν ταχύτητες τα κέντρα μάζας τους. Έτσι ο κύβος τώρα θα εκτελεί νέα γ.α.τ. με πλάτος που θα βρεθεί με την βοήθεια της ΑΔΕΤ

$$½ KA^2 + ½ M_1 u_{cm}^2 = ½ KA'^2$$

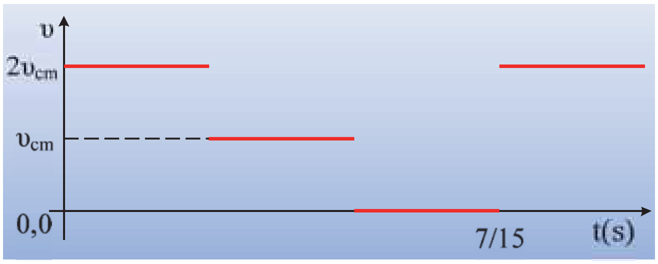
και μετά από πράξεις θα βρούμε Α΄=0,2m.

Το κέντρο μάζας της σφαίρας θα μείνει ακίνητο ενώ η στροφική της κατάσταση δεν θα αλλάξει. Αυτό θα συμβεί μέχρι ο κύβος να επιστρέψει στη θέση της κρούση και αυτό θα διαρκέσει χρονικό διάστημα

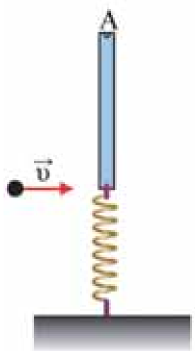
$$\Delta t_2 = T/12 + T/4 + T/4 + T/12 = 5/15 s$$

Εκείνη την στιγμή τα σώματα θα ανταλλάξουν και πάλι ταχύτητες οπότε ο κύβος θα μείνει ακίνητος στιγμιαία ενώ η σφαίρα θα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου $u_{cm}=\pi\sqrt{3}$ m/s ενώ θα συνεχίσει να περιστρέφεται κατά την αρχική φορά μέχρι το κέντρο μάζας να διανύσει και πάλι διάστημα $S=0,1\pi\sqrt{3}$ m οπότε θα συγκρουστεί ακαριαία με το τοίχο για να αλλάξει φορά το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας και να ξαναρχίσει η κύλιση της σφαίρας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και την χρονική στιγμή t=0. Ο χρόνος αυτός θα είναι $\Delta t_2=S/u_{cm}=0,1s$. Ο χρόνος όμως αυτός αντιστοιχεί σε χρόνο T/2 για τον κύβο. Ετσι ο κύβος θα βρεθεί στην αρχική του θέση όπου βρισκόταν και την χρονική στιγμή t=0. Έτσι το φαινόμενο θα επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο $T_{κιν}=T/2+\Delta t_1+\Delta t_2=7/15$ s

Γ. Μέχρι την πρώτη κρούση το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου της σφαίρα είναι $2u_{cm}=2\pi\sqrt{3}$ m/s. Μετά την πρώτη τους κρούση και μέχρι να γίνει η δεύτερη κρούση το ανώτερο σημείο της σφαίρα έχει μόνο την ταχύτητα περιστροφής που φυσικά έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας $u_{cm}=\pi\sqrt{3}$ m/s. Μετά την δεύτερη κρούση η σφαίρα κινείται προς τα δεξιά ενώ περιστρέφεται αριστερόστροφα. Έτσι το συνολικό μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου είναι 0 μιας και η ταχύτητα περιστροφής είναι αντίθετη της μεταφορικής ταχύτητας του κέντρου μάζας. Αυτό θα συμβαίνει μέχρι να γίνει η πρώτη κρούση με τον τοίχο οπότε θα ξαναρχίσει η κύλιση και θα φτάσουμε και πάλι στην αρχική κατάσταση. Έτσι η γραφική παράσταση θα έχει μορφή



Ράβδος-κρούση-πλάγιο ελατήριο



Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος ΑΓ έχει μάζα M=1Kg μήκος l=0,45m και ισορροπεί κατακόρυφα με την βοήθεια οριζόντιο καρφιού που βρίσκεται στο σημείο Α και κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθερά K=100N/m και φυσικού μήκους l_o=0,15m που ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το οριζόντιο καρφί που διέρχεται από το σημείο Α. Το μέτρο της δύναμη που δέχεται η ράβδος από το καρφί στην αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος είναι F=10N. Σημειακό σώμα μάζας m=0,2Kg κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ και σφηνώνεται ακαριαία στο άκρο Γ της ράβδου. Μετά την κρούση η ράβδος μόλις και φτάνει στην οριζόντια θέση. Να βρεθούν:

Α. Η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου
Β. Το μέτρο της ταχύτητας υ του σημειακού σώματος
Γ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος-σημειακό σώμα μόλις η ράβδος γίνει οριζόντια
Δ. Το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του σημειακού σώματος κατά την περιοδική κίνηση του συστήματος.

Για την ράβδο η ροπή αδράνειας δίνεται από τη σχέση $I_A=Ml^2/3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/sec^2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

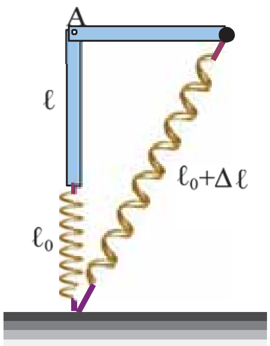
Α. Επειδή η ράβδος ισορροπεί για την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα θα έχου-με $\Sigma F_{\psi}=0$ άρα $Mg=F_{\kappa\alpha\rho}+F_{\varepsilon\lambda}$ άρα $F_{\varepsilon\lambda}=0$ άρα και η συσπείρωση του ελατηρίου $x_{\varepsilon\lambda}=0$.

Β. Με την βοήθεια της ΑΔΣ για την κρούση του σημειακού σώματος με τη ράβδο θα έχουμε

$$mul=(1/3Ml^2+ml^2)\omega \quad (1)$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση της ράβδου μέχρι την τελική οριζόντια θέση αν ορίσουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται α σημείο της ράβδου Γ όταν αυτή ισορροπεί κατακόρυφη θα έχουμε

$$½\,(1/3\,Ml^2+ml^2)\omega^2+Mgl/2=1/2\,K\Delta l^2+Mgl+mgl \quad (2)$$



Με τη βοήθεια του ΠΘ θα βρούμε την επιμήκυνση του ελατηρίου

$$(l_0+\Delta l)^2=\sqrt{\{l^2+(l+l_0)^2\}}$$ θα βρούμε $\Delta l=0{,}6m$.

Με τη βοήθεια σχέσεων (1) και (2) θα προκύψει

$$u=\sqrt{564}\approx 23{,}75 m/sec$$

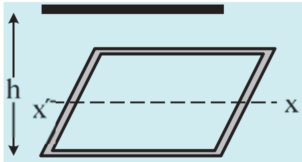
Γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος τη στιγμή που η ράβδος θα γίνει οριζόντια θα δίνεται από την σχέση

$$\Delta L/\Delta t=Mgl/2 + mgl+F_{\varepsilon\lambda\psi}l=51{,}15 N.m$$

Το σημειακό σώμα θα έχει την μέγιστη γραμμική του ταχύτητα στο χαμηλότερο σημείο της κίνησης του εκεί όπου η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι η ελάχιστη. Αυτό συμβαίνει την στιγμή αμέσως μετά την κρούση. Με την βοήθεια της σχέσης (1) θα βρούμε $\omega= 5\sqrt{564}/6 m/sec$ και η γραμμική ταχύτητα του σημειακού σώματος

$$u=\omega.l=0{,}375\sqrt{564}\approx 8{,}9 m/sec$$

Τετράγωνο και κρούση.



Ένα τετράγωνο πλαίσιο ΑΒΓΔ αποτελείται από τέσσερις λεπτές και ομογενείς ράβδους μάζας M=6Kg η κάθε μία και μήκους L=1m. Το τετράγωνο ισορροπεί οριζόντιο και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα xx΄ που διέρχεται γύρω από τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του τετραγώνου. Από ύψος H=0,8m ακριβώς πάνω στην ίδια κατακόρυφο και πάνω από μία πλευρά του τετραγώνου που δεν διέρχεται ο άξονας περιστροφής αφήνεται ελεύθερη μία άλλη οριζόντια ράβδος που έχει ίδια μάζα και ίδιο μήκος με τις ράβδους του τετραγώνου. Η ράβδος συγκρούεται τελείως πλαστικά με το τετράγωνο σε αμελητέο χρόνο . Να βρεθούν:

Α. Η ροπή αδράνειας του τετράγωνου γύρω από τον άξονα xx΄

Β. Την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση

Γ. Την μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος

Δίνεται το I_{cm}=1/12 ML^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το τετράγωνο αποτελείται από τέσσερις ράβδους οι οποίες όμως δεν έχουν την ίδια ροπή αδράνειας. Οι ράβδοι που βρίσκονται απέναντι από τον άξονα περιστροφής έχουν ροπή αδράνειας που θα βρεθεί με την βοήθεια του ορισμού της ροπής αδράνειας

$$I_1=I_2=(\Delta m_1+\Delta m_2+\ldots..+\Delta m_n)L^2/4=ML^2/4=1{,}5\ \text{kg.m}^2$$

$$I_3=I_4=\frac{1}{12}ML^2=0{,}5\ \text{kg.m}^2$$

Αρα η συνολική ροπή αδράνειας θα είναι $I_{ολ}=2I_1+2I_3=4\text{kg.m}^2$

Β. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της ράβδου

$$MgH=\frac{1}{2}M\upsilon^2 \text{ θα βρούμε } \upsilon=4\text{m/s}$$

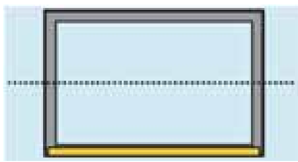
Η στροφορμή της ράβδου σε σχέση με τον άξονα περιστροφής xx΄ λίγο πριν την κρούση θα δίνεται από την

$$\text{σχέση } L_{αρχ}=(\Delta m_1+\Delta m_2+\ldots..\Delta m_n)\,\upsilon\frac{L}{2}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΣ για την κρούση του συστήματος θα έχουμε

$$L_{αρχ}=L_{τελ}\rightarrow \quad M\upsilon\frac{L}{2}=I_{ολ}\omega_{συσ} \text{ άρα } \omega_{συσ}=24/11\text{ r/s}$$

Γ. Το σύστημα θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια όταν οι ράβδοι της πλαστικής κρούσης φτάσουν στο χαμηλότερο σημείο

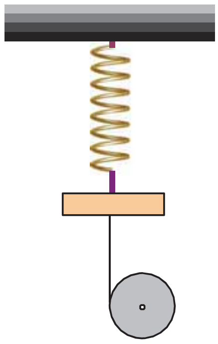


της τροχιάς τους γιατίμέχρι τότε το σύστημα επιταχύνει μέσω της ροπής του βάρους των δύο ράβδων. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση του συστήματος θα έχουμε

$$2Mg\frac{L}{2}+\frac{1}{2}I_{ολ}\omega^2_{συσ}=K_{\max}+Mg\frac{L}{2} \text{ θα βρούμε } K_{\max}=40{,}71\text{J}$$

Doppler με γιο-γιο και ταλάντωση

Το κατακόρυφο ελατήριο του παρακάτω σχήματος έχει σταθερά K=100N/m και έχει το ανώτερό του άκρο ακλόνητα δεμένο ενώ στο κατώτερό του άκρο είναι δεμένο σώμα μάζας m=1kg όπου και ισορροπεί με την βοήθεια κατάλληλης εξωτερικής κατακόρυφης δύναμης .Στο κάτω μέρος του σώματος και στην ίδια κατακόρυφο με το ελατήριο συνδέουμε ένα αβαρές μη εκτατό νήμα το οποίο το έχουμε τυλίξει σε κύλινδρο ακτίνας R=10cm και μάζας M=3kg.



Στο κέντρο του κυλίνδρου έχει στερεωθεί ανιχνευτής ήχων.Την στιγμή t=0 ο κύλινδρος αφήνεται ελεύθερος το σκοινί αρχίζει να ξετυλίγεται η εξωτερική δύναμη καταργείται και το σώμα μάζας m συνεχίζει να ισορροπεί. Στην ίδια κατακόρυφο με τον κύλινδρο και το ελατήριο και πάνω στο έδαφος υπάρχει ακίνητη πηγή ηχητικών ήχων με συχνότητα F_s=680Hz. Την χρονική στιγμή t_1=3sec το νήμα κόβεται .Να βρεθούν:

A. Ο ρυθμός μεταβολής της συχνότητας που ανιχνεύει ο ανιχνευτής πριν και μετά το κόψιμο του νήματος.
B. Η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής την στιγμή t_2=1,5sec καθώς και την χρονική στιγμή t_3=7sec καθώς και η ταχύτητα του

σώματος m την χρονική στιγμή t_2 και τη χρονική στιγμή $t_4=(3+\pi/4)sec$

Γ. Η εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας με τον χρόνο για το σώμα m αλλά και για το σώμα M .

Δ. Η γραφική παράσταση της στροφορμής του σώματος M σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Για τον κύλινδρο $I_{cm}=0,5M.R^2$ ενώ για τον ήχο $u_{\eta\chi}=340m/sec$ και $g=10m/sec^2$.

Δίνεται η σχέση ημ2χ=2συνχ.ημχ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για τον κύλινδρο και την κίνηση του πριν κοπεί το νήμα θα έχουμε από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και την στροφική κίνηση

$$M.g-T=M.a \;\; (1) T.R=0,5M.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ άρα } T=0,5.M.a \;\; (2)$$

θα βρούμε

$$a=20/3 \ m/sec^2 \text{ και } T=10N.$$

Η συχνότητα που ανιχνεύει ο ανιχνευτής που βρίσκεται στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα δίνεται από την σχέση

$$F_a=(u_{\eta\chi}+v_{cm}).F_S/u_{\eta\chi} \;\; (3)$$

Ο ρυθμός μεταβολής αυτής της συχνότητας θα είναι πριν κοπεί το νήμα

$\Delta Fa/\Delta t = Fs.a/u_{ηχ}$ άρα $\Delta Fa/\Delta t = 40/3$ Hz/sec

Οταν όμως κοπεί το νήμα η μοναδική δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο είναι το βάρος του άρα και η επιτάχυνσή του θα είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας

$\Delta Fa'/\Delta t = Fs.g/u_{ηχ}$ άρα $\Delta Fa/\Delta t = 20$ Hz/sec

B. Την χρονική στιγμή $t_1=1{,}5$sec το νήμα δεν έχει κοπεί ακόμη και έτσι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι

$v_{cm}=a.t_1= 10$m/sec έτσι από την σχέση (3) θα έχουμε Fa=700Hz

Την στιγμή $t_2=7$sec το νήμα έχει κοπεί και ο κύλινδρος κινείται πλέον με την επίδραση μόνο του βάρους του. Την στιγμή που κόβεται το νήμα το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει ταχύτητα $v_{cm}=a.t_1=20$m/sec ενώ την στιγμή $t_3=7$sec η $v_{cm}'=20+10.4=60$m/sec και με την βοήθεια της σχέσης (3) θα βρούμε Fa΄ =800Hz.

Το σώμα m αρχίζει την ταλάντωσή του την στιγμή που κόβεται το νήμα δηλαδή την χρονική στιγμή t_1.

Ετσι την στιγμή $t_2=1{,}5$sec δεν έχει αρχίσει ακόμη η ταλάντωσή του άρα $υ_m=0$m/sec.

Για την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος m θα ισχύει $m.g+T=K.x_1$ άρα $x_1=0{,}2$m.

Μετά το κόψιμο του νήματος για την νέα θέση ισορροπίας θα ισχύει $m.g=Kx_2$ άρα $x_2=0{,}1$m.

Την στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα μάζας m δεν έχει ταχύτητα άρα αν ορίσουμε θετική φορά προς τα πάνω το σώμα θα βρίσκεται στην ΘΕΑ και άρα το πλάτος του θα είναι $A=x_1-x_2=0,1m$

Ετσι η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος m θα είναι

$$υ=1.συν(10t΄+3π/2) \text{ (S.I.) } (4)$$

Όπου $t΄=t-3$ (S.I) ο χρόνος μετά την χρονική στιγμή t_1.

Αρα για $t_4=(3+π/4)$sec ο $t΄=π/4$ sec

Και αντικαθιστώντας στην (4) θα έχουμε $υ_m΄=1$m/sec.

Γ. Για το σώμα m και μετά το κόψιμο του νήματος το

$ΔK/Δt=ΣF.u=-D.x.υ=-\ 100.0,1ημ(10t΄+3π/2).συν(10t΄+3π/2)=$

$-5ημ(20t΄+3π)$ (S.I.) όπου t΄ο χρόνος μετά το κόψιμο του νήματος.

Για το σώμα M και πριν κοπεί το νήμα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας θα δινόταν από την σχέση

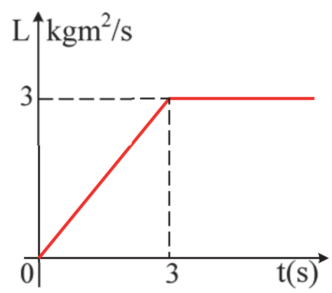
$ΔK/Δt=ΣF.u+Στ.ω=200.t$ $t<3sec$ ενώ μετά το κόψιμο του νήματος

$ΔK/Δt=ΣF.u=M.g.u=600+300(t-3)$ για $t>3sec$.

Δ. Πριν το νήμα κοπεί η στροφορμή θα δίνεται από την σχέση

$L=I.ω=0,5M.R^2.α_{γων}..t=\ t$ $t<3sec$ (S.I) ενώ μετά το κόψιμο του νήματος η στροφορμή του κυλίνδρου παραμένει σταθερή αφού δεν υπάρχει καμία δύναμη που να προκαλεί ροπή έτσι $L=3kg.m^2/sec$ $t>3sec$

Ετσι η γραφική παράσταση της στροφορμής θα είναι



Στάσιμα κύματα και Doppler.

Δύο ελαστικές ίδιες χορδές από το ίδιο υλικό στερεώνονται στο ένα τους άκρο από ακλόνητο σημείο έτσι ώστε να είναι οριζόντιες και να απέχουν μεταξύ τους κατακόρυφη απόσταση D=5cm. Πάνω στις χορδές έχει σχηματιστεί στάσιμο κύμα και στο ελεύθερο άκρο των δύο χορδών έχει σχηματιστεί κοιλία. Όσα τα σημεία της κάθε χορδής ταλαντώνονται, ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και με το ίδιο μέγιστο πλάτος και στις χορδές.Την χρονική στιγμή t=0 το ελεύθερο άκρο της πάνω χορδής βρίσκεται στην θέση ψ=0 και έχει θετική ταχύτητα ενώ της κάτω χορδής βρίσκεται στη θέση ψ=0 αλλά έχει αρνητική ταχύτητα.

Τοποθετούμε στο ελεύθερο άκρο της κάτω χορδής μία σημειακή αβαρή πηγή που εκπέμπει ήχο συχνότητας Fs ενώ στο πάνω ελεύθερο άκρο τοποθετούμε έναν αβαρή ανιχνευτή ήχων. Παρατηρούμε ότι ο ανιχνευτής ανιχνεύει περιοδικά μέγιστη αλλά και ελάχιστη συχνότητα και για το γινόμενο αυτών των συχνοτήτων να ισχύει $F_{max} \cdot F_{min}=250000\ Hz^2$ ενώ ο λόγος τους είναι $F_{max}/F_{min}=1,201$. Για την κατακόρυφη απόσταση του ανιχνευτή από την πηγή ισχύει η σχέση $1cm \leq d$. Αν ο ανιχνευτής και η πηγή των ηχητικών κυμάτων μετακινηθούν προς τα δεξιά και πάνω στις χορδές παρατηρούμε ότι για πρώτη φορά ο ανιχνευτής ανιχνεύει διαρκώς την τιμή F_S όταν διανύσουν ταυτόχρονα οριζόντια απόσταση 5cm. Αν πάνω στην κάθε χορδή υπάρχουν 10 ακίνητα σημεία να βρεθούν:

Α. Το μήκος της κάθε χορδής

Β. Η συχνότητα Fs της πηγής

Γ. Οι εξισώσεις των δύο στάσιμων κυμάτων που δημιουργήθηκαν στις χορδές.

Δίνεται η $u_{\eta\chi}$=340m/s και $(1{,}201)^{1/2}=1{,}01$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να ανιχνεύει ο ανιχνευτής την συχνότητα της πηγής θα πρέπει η σχετική απόσταση πηγής παρατηρητή να είναι σταθερή. Αυτό μπορεί να συμβεί ή όταν και οι δύο κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση με το ίδιο μέτρο ταχύτητας ή όταν και οι δύο είναι ακίνητοι. Στις χορδές μας όμως όλα τα σημεία και μέχρι τον πρώτο τους δεσμό κινούνται συνεχώς αντίθετα άρα δεν μπορεί η σχετική τους απόσταση να είναι σταθερή. Έτσι το πρώτο σημείο που θα ανιχνευτεί συχνότητα ίση με την F_s είναι ο και ο πρώτος δεσμός του στάσιμου κύματος. Ετσι λ/4=5cm άρα λ=20cm. Επειδή η κάθε χορδή μας έχει 10 ακίνητα σημεία άρα 10 δεσμούς με την βοήθεια της εξίσωσης που δίνει τους δεσμούς θα έχουμε $x_{\delta\varepsilon\sigma\mu\acute{\omega}\nu}=(2\kappa+1)\lambda/4$ και για τιμή κ=9 (ο δέκατος δεσμός) θα βρούμε L=95cm.

Β. Από την εξίσωση για το φαινόμενο Doppler θα έχουμε

$$f_{\pi\alpha\rho} = \frac{u_{\eta\chi} \pm u_{\pi\alpha\rho}}{u_{\eta\chi} \pm u_{\pi\eta\gamma}} f_{\pi\eta\gamma}$$

Η πηγή και ο παρατηρητής βρίσκονται πάνω σε κοιλία του στάσιμου κύματος και αποκτούν ταυτόχρονα την μέγιστη και την ελάχιστη τους ταχύτητα. Η μέγιστη συχνότητα που θα καταγράφει ο ανιχνευτής θα είναι όταν και δύο βρίσκονται στην ΘΙΤ και θα πλησιάζουν μεταξύ τους ενώ η ελάχιστη συχνότητα θα είναι όταν θα βρίσκονται στην ΘΙΤ και θα απομακρύνονται μεταξύ τους. Με βάσει τα παραπάνω θα έχουμε

$$f_{\max} = \frac{u_{\eta\chi} + \omega 2A}{u_{\eta\chi} - \omega 2A} f_s \quad (1)$$

$$f_{\min} = \frac{u_{\eta\chi} - \omega 2A}{u_{\eta\chi} + \omega 2A} f_s \quad (2)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις εξισώσεις (1) & (2) και με την βοήθεια των δεδομένων θα καταλήξουμε

$Fs^2=250000$ άρα η συχνότητα Fs=500Hz.

Γ. Η ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση της πηγής και του ανιχνευτή θα συμβεί όταν το ένα θα βρίσκεται στην θέση -2Α ενώ το άλλο θα βρίσκεται στην θέση +2Α. Αρα η d_{min}=D-4A άρα το A=1cm.

Αν διαιρέσουμε τις εξισώσεις (1) &(2) θα έχουμε:

$$\frac{(u_{\eta\chi} - \omega 2A)^2}{(u_{\eta\chi} + \omega 2A)^2} = 1{,}201$$

μετά τις πράξεις ω=340/4,02=84,58r/s.

Ετσι οι εξισώσεις για τα στάσιμα κύματα θα έχουν μορφή

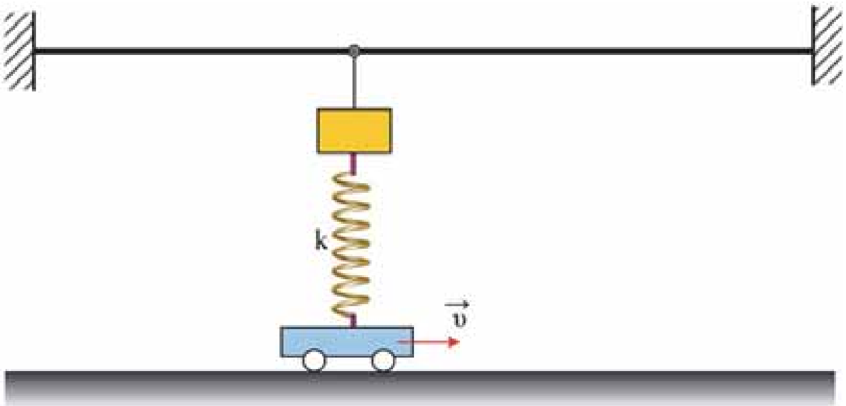
$$\psi_1=0{,}02\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{0{,}2}\right)\cdot\eta\mu 84{,}58t \text{ (SI) για την πάνω χορδή}$$

Και

$$\psi_2=0{,}02\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{0{,}2}\right)\cdot\eta\mu(84{,}58t+\pi) \text{ (SI) για την κάτω χορδή}$$

Το κύμα σε μια χορδή και το φαινόμενο Doppler

Ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=3600\pi^2 N/m$ είναι προσαρμοσμένο- στερεωμένο πάνω σε ένα ειδικό καροτσάκι που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές και με σταθερή ταχύτητα υ=10m/sec πάνω σε οριζόντιο δρόμο χωρίς να μπορεί να αποχωριστεί από τον οριζόντιο δρόμο. Στο πάνω μέρος του ελατηρίου στερεώνουμε σώμα μάζας m=1kg και το σώμα μέσω ειδικού γάντζου συνδέεται με αβαρή οριζόντια ελαστική χορδή μεγάλου μήκους πάνω στην οποία μπορεί να διαδοθεί εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα διάδοσης V=40m/sec.



Την χρονική στιγμή t=0 και ενώ το σύστημα ισορροπεί δίνουμε στο σώμα μάζας m κατακόρυφη ταχύτητα U=15π m/sec προς τα πάνω και την ίδια στιγμή το καροτσάκι ξεκινάει την ομαλή του κίνηση.

Α. Ποια η συχνότητα ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της ελαστικής χορδής.

Β. Να χαραχθεί η μορφή της ελαστική χορδής την χρονική στιγμή t=0,2sec θεωρώντας x=0 την θέση της πηγής εκείνη την στιγμή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Έχουμε μία κινούμενη πηγή που δημιουργεί ένα κύμα στην οριζόντια ελαστική χορδή. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης θα μας δώσει το πλάτος ταλάντωσης σύμφωνα με την σχέση $U=\omega.A$ και $\omega_{πηγής}=\sqrt{K/m}=60\pi$ r/sec Αρα $A=0{,}25$m.

Η πηγή κινείται έτσι τα σημεία της χορδής που τα αφήνει πίσω της θα ταλαντώνονται με διαφορετική συχνότητα από τα σημεία που θα τα βρεί μπροστά της. Ετσι με βάση το φαινόμενο Doppler θα πάρουμε

$F_1=VFs/(V-\upsilon)=40Hz$ για τα σημεία που πλησιάζει η πηγή και $F_2=VFs/(V+\upsilon)=24Hz$ για τα σημεία από όπου απομακρύνεται η πηγή.

Το μήκος κύματος αν πηγή ήταν ακίνητη θα ήταν:

$$\lambda_s=40/30=4/3m.$$

Το μήκος κύματος για τα σημεία μπροστά από την πηγή θα είναι:

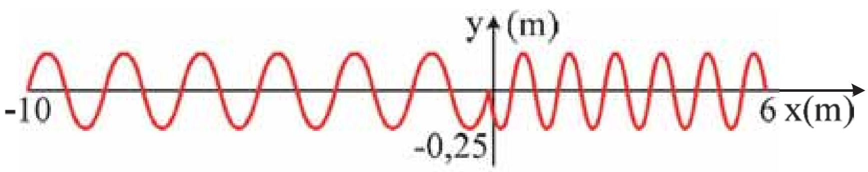
$$\lambda_1=\lambda_s-\upsilon.T_s=4/3-10/30=1m.$$

Το μήκος κύματος για τα σημεία πίσω από την πηγή θα είναι :

$$\lambda_2=\lambda s+\upsilon.T_s=4/3+10/30=5/3m.$$

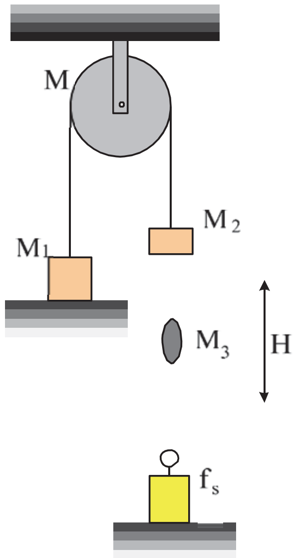
B. Ο χρόνος t=0,2sec αντιστοιχεί σε 6Ts άρα θα έχουν διαδοθεί 6 μήκη κύματος προς τα μπρος και 6 προς τα πίσω σε σχέση με την πηγή.

Ετσι η μορφή της χορδής θα είναι θεωρώντας σαν αρχή x=0 την πηγή των κυμάτων την στιγμή t=0,2sec



Τροχαλία και φαινόμενο Doppler

Στο παρακάτω σχήμα η τροχαλία έχει μάζα M=4kg και τα σώματα έχουν μάζες M_1=2Kg και M_2=0,5Kg. Το σύστημα ισορροπεί κατακόρυφα.



Σώμα μάζας M_3=0,5Kg την χρονική στιγμή t=0 εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου U=20m/sec και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας M_2 αφού διανύσει κατακόρυφη απόσταση H=15m. Στην ίδια κατακόρυφο με τα σώματα M_2 και M_3 υπάρχει ακίνητη πηγή παραγωγής αρμονικών ήχων με συχνότητα εκπομπής Fs=680Hz.
Να παρασταθεί γραφικά η συχνότητα του ήχου που καταγράφει ανιχνευτής που είναι προσαρμοσμένος πάνω στο σώμα μάζας M_3 αν υποτεθεί ότι δεν καταστρέφεται στη διάρκεια της πλαστικής κρούσης.
Η γραφική παράσταση να δοθεί από την στιγμή t=0 μέχρι την στιγμή που το σώμα M_3 θα σταματήσει στιγμιαία για δεύτερη φορά.
Το Icm=0,5M.R^2 και Uηχ=340m/sec.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του σώματος M_3 θα έχουμε:

$$K_1=K_2+UW$$

άρα U_3=10m/sec

και από το νόμο της ταχύτητας για την επιβραδυνόμενη κίνηση προς τα πάνω θα βρούμε το χρόνο μέχρι την κρούση:

$U_3=U-g.t_1$ άρα $t_1=1sec$. ΑΔΟ για την πλαστική κρούση:

$M_3.U_3=(M_2+M_3)U\sigma$ άρα

$U\sigma=5m/sec.$

Αν υποθέσουμε ότι το νήμα αμέσως μετά την κρούση είναι πλέον χαλαρό το σύστημα των σωμάτων M_2-M_3 εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση προς τα πάνω με την επίδραση μόνο του βάρους των δύο σωμάτων. Ετσι και πάλι με την βοήθεια του νόμου της ταχύτητας για την επιβραδυνόμενη κίνηση θα έχουμε μέχρι το σύστημα των σωμάτων να σταματήσει $0=5-10t_2$ άρα $t_2=0,5sec$. Στην συνέχεια έχουμε ελεύθερη πτώση των δύο σωμάτων μέχρι να έρθει η στιγμή για να τεντωθεί και πάλι το νήμα. Ο χρόνος ανόδου είναι ίσος με τον χρόνο καθόδου έτσι σε χρόνο $t_3=0,5sec$ το νήμα θα είναι έτοιμο να τεντωθεί.

Για το τέντωμα του νήματος θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ έτσι

$(M_2+M_3).U\sigma.R=(M_2+M_3+M_1).U\kappa o\iota\nu.R+I.\omega$

$1.5.R=3.U\kappa o\iota\nu.R+0,5.4.U\kappa o\iota\nu.R$ άρα $U\kappa o\iota\nu=1m/sec.$

Το σύστημα M_1-M_2-M_3-τροχαλίας θα εκτελέσει επιβραδυνόμενη κίνηση γιατί η εξωτερική ροπή του βάρους του σώματος M_1 είναι μεγαλύτερη από την εξωτερική ροπή του βάρους του συστήματος M_2-M_3.Από τους νόμους κίνησης των σωμάτων και της τροχαλίας θα έχουμε

$M_1.g-T_1=M_1.a$ (1) $\qquad T_2-(M_2+M_3).g=(M_2+M_3).a$ (2)

$T_1.R-T_2.R=0,5.M.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (3)

Μετά από πράξεις $a=2m/sec^2$.

Αρα με τον νόμο της επιβραδυνόμενης κίνησης για το σύστημα M_2-M_3 και μέχρι το σύστημα να σταματήσει από τον νόμο της ταχύτητα

$U=U_{κοιν}-a.t_4$ θα βρούμε $t_4=0{,}5sec$. Για την πρώτη κίνηση του σώματος M_3

η εξίσωση της συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής θα είναι

$$F_1=\{340-(20-10t)\}.680/340=640+20t\ldots 0<t<1 \quad (S.I)$$

Μετά την πλαστική κρούση και για την άνοδο του συστήματος M2-M3

$$F_2=\{340-(5-10t')\}.680/340=670+20t'\ldots 0<t'<0{,}5 \quad (S.I) \text{ με } t'=t-1 \ (S.I)$$

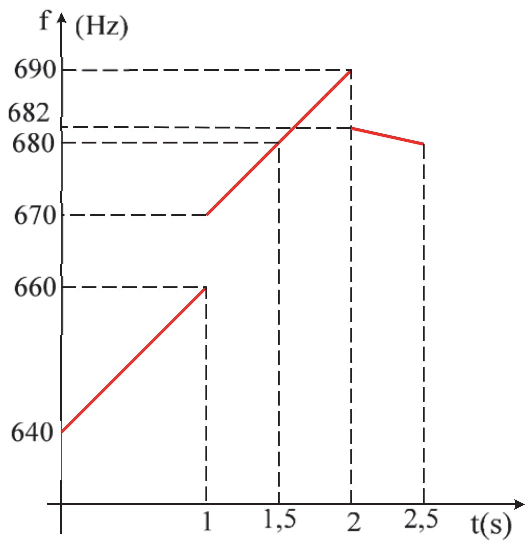
Για την κάθοδο του συστήματος M_2-M_3 και μέχρι το τέντωμα του νήματος

$$F_3=\{340+10t''\}.680/340=680+20t''\ldots 0<t''<0{,}5 \quad (S.I) \quad \text{με } t''=t-1{,}5 \ (S.I.)$$

Μετά το τέντωμα του νήματος και μέχρι να σταματήσει στιγμιαία το σύστημα

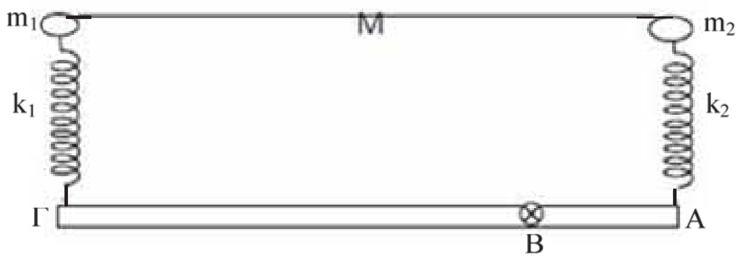
$$F4=\{340+(1-2t''')\}.680/340=682-4t'''\ldots 0<t'''<0{,}5 \quad (S.I) \text{ με } t'''=t-2 \ (S.I.)$$

Ετσι η γραφική παράσταση θα είναι η παρακάτω



Δύο ελατήρια- ταλάντωση και κύμα.

Η αβαρής ράβδος ΑΓ του παρακάτω σχήματος έχει μήκος L=π/5m μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο καρφί που σταθερά στερεωμένο στο σημείο Β με την απόσταση ΑΒ=ΑΓ/5. Στα άκρα Α και Γ της ράβδου ισορροπούν κατακόρυφα δύο ελατήρια με το ίδιο φυσικό μήκος και σταθερές K_1=100N/m και K_2=400N/m και πάνω στα ελατήρια τοποθετούνται δύο σημειακά σώματα με μάζες m_1=1Kg και m_2=4Kg. Συνδέουμε τα δύο σώματα με αβαρή οριζόντια ελαστική χορδή.



Την χρονική στιγμή t=0 εκτοξεύουμε τα δύο σώματα με κατάλληλη αρχική ταχύτητα και φορά προς τα πάνω έτσι ώστε τα ελατήρια μόλις και να μην ξεπερνούν το φυσικό τους μήκος. Στην ελαστική χορδή μπορούν να διαδοθούν αρμονικά κύματα με ταχύτητα U=0,5 m/sec .

A. Να αποδειχθεί ότι το σύστημα ισορροπεί και να βρεθεί το μέτρο της δύναμης που δέχεται το καρφί σε συνάρτηση με το χρόνο.
B. Να σχεδιασθεί η μορφή της ελαστικής χορδή την χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται το μέσο Μ της χορδής .Ποια η ταχύτητα ταλάντωσης του μέσου της χορδής εκείνη τη στιγμή. Πόσα ακόμη σημεία της χορδής έχουν εκείνη τη στιγμή την ίδια

ταχύτητα ταλάντωσης;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την ισορροπία του κάθε σώματος

$m_1.g=K_1.x_1$ άρα $χ_1=0,1m$ $m_2.g=K_2.x_2$ άρα $χ_2=0,1m$.

Για να μην ξεπερνάνε τα δύο σώματα τη Θ.Φ.Μ.Ε θα πρέπει και το πλάτος της ταλάντωσης του κάθε σώματος να είναι

$$A_1=A_2=0,1m.$$

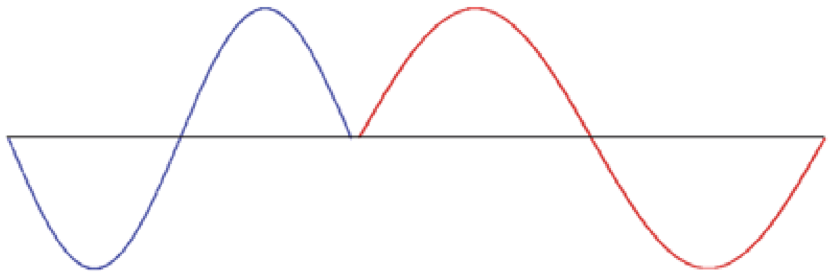
Η δύναμη του κάθε ελατηρίου για μία τυχαία θέση θα δίνεται από την σχέση $F_{ελ1}-m_1.g=-K_1.A_1ημω_1.t$ και $F_{ελ2}-m_2.g=-K_2.A_2ημω_1.t$
μετά από πράξεις $F_{ελ1}=10-10ημ10t$ (SI) και $F_{ελ2}=40-40ημ10t$ (SI)
Για να ισορροπεί το σύστημα θα πρέπει $Στ(o)=0$ άρα

$$-F_{ελ2}.(ΒΓ)+F_{ελ2}.(ΑΒ)=0 \text{ άρα}$$
$$-(40-40ημ10t).π/5+(10-10ημ10t).4π/5=0$$

που ισχύει άρα το σύστημα ισορροπεί.
Για την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα

$$F_{καρφιού}=F_{ελ1}+F_{ελ2}=50-50ημ10t.$$

Β. Το μέσο Μ απέχει απόσταση $L/2=π/10$ m και θα χρειασθεί χρόνος $t=L/2/U=π/5sec$ για να φτάσει το κάθε κύμα στο μέσο Μ.
Ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί και με την περίοδο και των δύο κυμάτων που δημιουργούν οι δύο ταλαντώσεις.
Ετσι το σχήμα της χορδής θα είναι



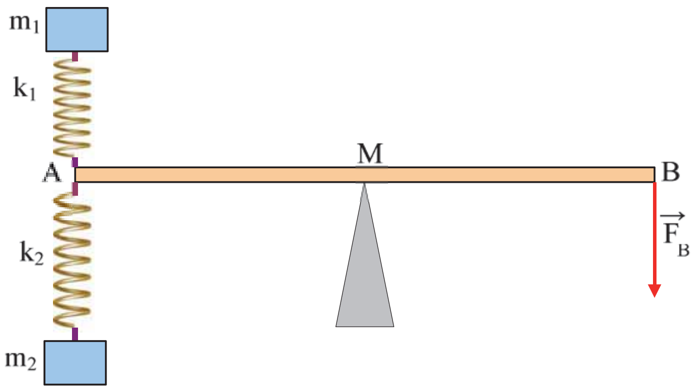
Το μέσο Μ είναι σημείο ενισχυτική συμβολής και η μέγιστη ταχύτητά του θα δίνεται από τη σχέση

$$U_{max}=ω.2A =2m/sec.$$

Κανένα άλλο σημείο δεν έχει την ίδια ταχύτητα με το μέσο Μ γιατί δεν έχει αρχίσει ακόμη η συμβολή των δύο κυμάτων.

Δυο ελατήρια και μια ράβδος.

Στο παρακάτω σχήμα η αβαρής ράβδος ΑΒ ισορροπεί συνεχώς οριζόντια με τη βοήθεια κατακόρυφου υποστηρίγματος που βρίσκεται στο μέσο Μ της ράβδου και τη βοήθεια κατάλληλης κατακόρυφης δύναμης F_B που ασκείται στο σημείο Β της ράβδου.



Πάνω στα κατακόρυφα ελατήρια με σταθερές K_1=100N/m και K_2=400N/m και με το ίδιο φυσικό μήκος l_o ισορροπούν δύο σώματα με μάζες m_1 =1 kg και m_2= 4 kg. Την χρονική στιγμή t=0 φέρνουμε τα ελατήρια στο φυσικό τους μήκος και τα σώματα με μάζες m_1 και m_2 αφήνονται ταυτόχρονα ελεύθερα ενώ η ράβδος ΑΒ με την βοήθεια της εξωτερικής δύναμης συνεχίζει να παραμένει ακίνητη σε όλη της διάρκεια της ταλάντωσης των δύο σωμάτων.

Α. Να βρεθεί η εξίσωση της δύναμης F_B σε συνάρτηση με το χρόνο.

Β. Αν τα δύο σώματα θεωρηθούν σημειακά να αποδειχθεί ότι η μεταξύ τους απόσταση παραμένει σταθερή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το κάθε σώμα θα εκτελέσει ταλάντωση με γωνιακές συχνότητες που θα βρεθούν από την σχέση $\omega=\sqrt{K/m}$ άρα $\omega_1=\omega_2=10rad/sec$ και πλάτη που θα βρεθούν από την συνθήκη ισορροπίας του κάθε σώματος $M.g=K.A$ άρα $A_1=A_2=0,1m$.

Η εξίσωση λοιπόν της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας του για το κάθε σώμα, αν θεωρήσουμε θετική φορά τη φορά προς τα πάνω ,θα είναι

$$\psi_1=\psi_2=0,1\eta\mu(10t+\pi/2) \text{ (S.I.)}$$

Το πάνω ελατήριο θα είναι συνεχώς συμπιεσμένο και άρα η δύναμη του ελατηρίου θα έχει φορά συνεχώς προς τα κάτω ενώ το κάτω ελατήριο θα είναι συνεχώς τεντωμένο άρα και η δύναμη αυτού του ελατηρίου θα έχει συνεχώς φορά προς τα κάτω.

Για μία τυχαία θέση για το πάνω σώμα $\Sigma F=-K_1.\psi$ άρα

$$F_{\varepsilon\lambda 1}-m_1.g=-K_1.\psi_1 \text{ (1)}$$

Για μία τυχαία θέση για το κάτω σώμα $\Sigma F=-K.\psi$ άρα

$$F_{\varepsilon\lambda 2}-m_2.g=-K_2.\psi_2 \text{ (2)}$$

Κάνοντας πράξεις στην (1) και (2) θα βρούμε

$F_{\varepsilon\lambda 1}=10-10\eta\mu(10t+\pi/2)$ (S.I.) και $F_{\varepsilon\lambda 2}=40-40\eta\mu(10t+\pi/2)$ (S.I.)

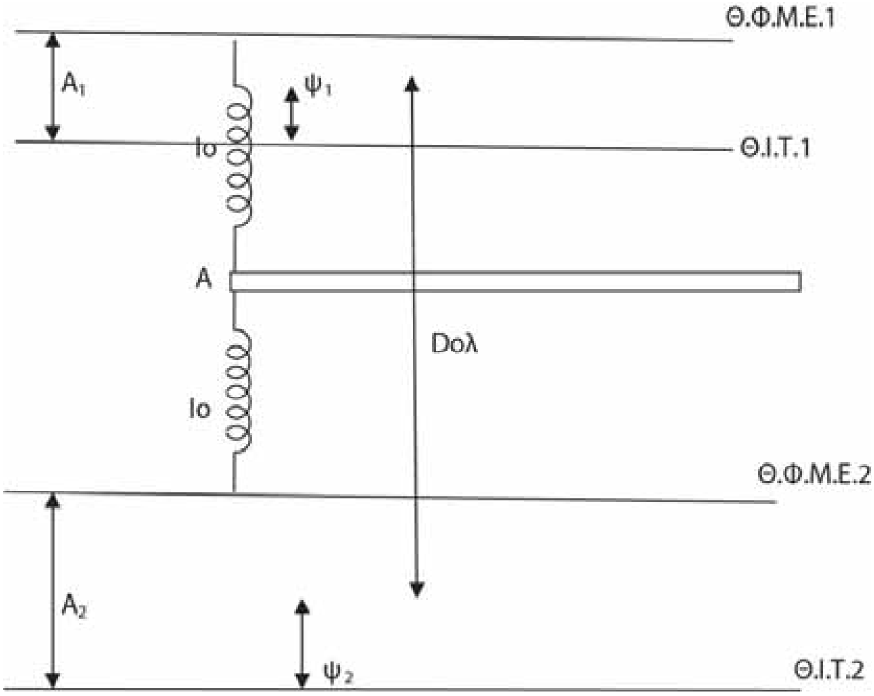
Από την ισορροπία της ράβδου θα έχουμε $\Sigma\tau(M)=0$ άρα

$$-F_B.L/2 + F_{\varepsilon\lambda 1}.L/2 + F_{\varepsilon\lambda 2}.L/2=0 \text{ άρα } F_B=F_{\varepsilon\lambda 1} + F_{\varepsilon\lambda 2}$$

και μετά από πράξεις

$$F_B=50-50ημ(10t+π/2) \text{ (S.I)}$$

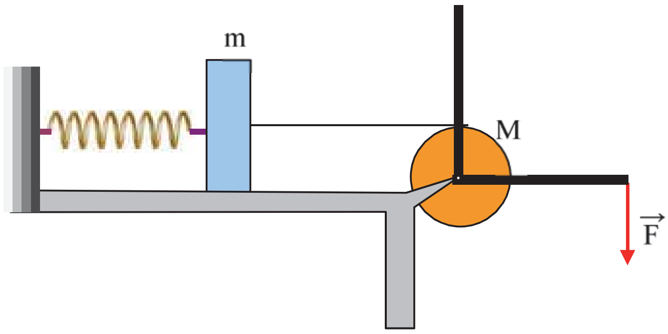
Β. Η απόσταση $D_{ολ}$ των δύο σημειακών σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 μπορεί να βρεθεί με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος



$D_{ολ}=2l_o+A_2-A_1+ψ_1-ψ_2=2l_o$

Ένα ελατήριο και βαρούλκο

Στο παρακάτω σχήμα το σώμα έχει μάζα m=1/π kgr ο κύλινδρος που έχει μάζα M_1=2kg και ακτίνα R_1=1m είναι στερεωμένος με κατάλληλο υποστήριγμα έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα. Πάνω στον κύλινδρο είναι κολλημένη ράβδος μήκους L= 2m και μάζας M_2=3Kg με το ένα της άκρο να βρίσκεται στο κέντρο του κυλίνδρου.



Η ράβδος ισορροπεί κατακόρυφα .Το ελατήριο έχει σταθερά Κ=100/π N/m και βρίσκεται στο φυσικό του μήκος με το νήμα να είναι τεντωμένο και δεμένο στο ανώτερο σημείο του κυλίνδρου. Με την βοήθεια κατάλληλης δύναμης αρχίζουμε να περιστρέφουμε το σύστημα επιμηκύνοντας το ελατήριο με το νήμα να τυλίγεται στον κύλινδρο μέχρι η ράβδος να περιστραφεί κατά 90^o .

Να βρεθούν:

Α. Το μέτρο της δύναμης που πρέπει ασκούμε κάθετα στην ράβδο αν το σύστημα ισορροπεί μετά από την διαγραφή των 90^o .

Β. Ποια η ελάχιστη ενέργεια που δαπανήσαμε έως εκείνη την στιγμή αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν οποιαδήποτε είδη τριβών.

Όταν το σύστημα έχει διαγράψει γωνία 90^o και το σύστημα ισορροπεί το νήμα κόβεται και η εξωτερική δύναμη καταργείται.

Γ. Πόση μέγιστη ταχύτητα θα αποκτήσει το σώμα m και πόση μέγιστη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου;

Δ. Ποιο από τα δύο συστήματα θα αποκτήσει πρώτο την μέγιστη κινητική ενέργεια.

Δίνονται για τον κύλινδρο $I=0,5M_1.R_1^2$ για την ράβδο $I=1/3M_2.L^2$ και π=3,14

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου ισορροπεί. Αν εφαρμόσουμε Στ=0 γύρω από τον άξονα περιστροφής του συστήματος θα έχουμε

$$-F.L - M_2 g.L/2 + T.R_1 = 0 \quad (1)$$

Για την ισορροπία όμως του σώματος m θα έχουμε $F_{ελ}=T$ άρα

$$K.2πR_1/4 = T \text{ άρα } T = 50 \text{ N.}$$

Από την (1) θα βρούμε F=10N

Β. Με εφαρμογή της ΑΔΕ από την αρχική μέχρι την τελική θέση θα έχουμε

$$E_{min} + U_{Wραβδου} = U_{ελατηρίου}$$

$$\text{έτσι } E_{min} + M_2.g.L/2 = 1/2K.(2πR_1/4)^2$$

$$\text{άρα } E_{min} = 9,25 \text{ J}$$

Γ. Όταν κοπεί το νήμα τα σώματα δεν έχουν ταχύτητα. Ετσι το σώμα m που είναι δεμένο στο ελατήριο θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Το πλάτος ταλάντωσης του θα είναι $A=2\pi R_1/4= \pi/2$ m άρα η μέγιστη ταχύτητά του θα βρεθεί από την σχέση $U_{max}=\omega.A= 5\pi$ m/sec.

Το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια την στιγμή που η δυναμική του ενέργεια θα γίνει ελάχιστη δηλαδή στην θέση όπου η ράβδος θα βρεθεί στην κατώτερή της θέση δηλαδή στην κατακόρυφη θέση κατεβαίνοντας. Με την βοήθεια την ΑΔΕ για το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου από την στιγμή που κόβουμε το νήμα και μέχρι την κατώτερη θέση θα έχουμε

$$U_{W\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon}=K_{max} \text{ άρα } M_2.g.L/2 =1/2I_{o\lambda}.\omega_{max}^2$$

$$\text{με } I_{o\lambda}=1/2M_1.R_1^2+ 1/3M_2.L^2= 5Kg.m^2$$

$$\text{θα βρούμε } \omega_{max}=2\sqrt{3} \text{ r/sec.}$$

Δ. Το σώμα m θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα μετά από χρόνο T/4 αφού βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσή του δηλαδή μετά από χρόνο:

$$t=\pi\sqrt{m/K}/2 = \pi/20\approx 0,157 \text{ sec.}$$

Το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου εκτελεί επιταχυνόμενη στροφική κίνηση με συνεχώς μειούμενη γωνιακή επιτάχυνση αφού η ροπή του βάρους της ράβδου M_2 συνεχώς μειώνεται. Αν υποθέσουμε ότι η ροπή αυτή ήταν σταθερή και ίση με την μέγιστη αρχική τιμή τότε

$M_2.g.L/2=I_{ολ}.α_{γωνmax}$ θα υπολογίζαμε $α_{γωνmax}= 6\ r/sec^2$. Η γωνία τότε διαγραφής του συστήματος θα δινόταν από την σχέση:

$$θ=1/2\ α_{γωνmax}.t_{min}^2 \text{ και με } θ=π/2$$

θα βρίσκαμε τον ελάχιστο χρόνο που θα χρειαζόταν το σύστημα για να φτάσει στην κατώτερή του θέση.

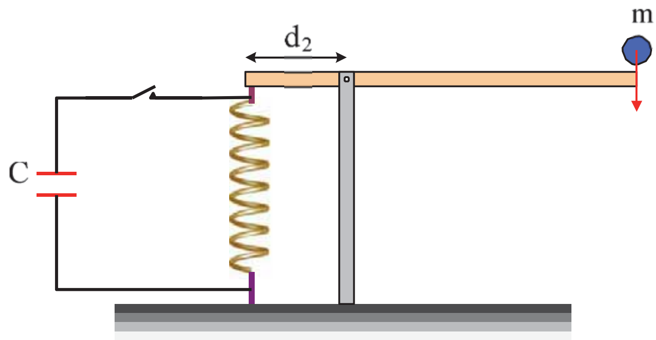
$$\text{Αρα}\quad t_{min}= \sqrt{π/6}≈0,72 \text{ sec.}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σώμα m φτάνει στην ΘΙΤ σε μικρότερο χρόνο από τον χρόνο που θα έφτανε το σύστημα κυλίνδρου-ράβδου στην κατώτερη θέση αν είχε συνεχώς σταθερή-μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση. Ο χρόνος που θα χρειασθεί το σύστημα κύλινδρος-ράβδος είναι μεγαλύτερος από τον ελάχιστο.

Τελικά πρώτο θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο.

Ένα ελατήριο που είναι και πηνίο

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα ελατήριο που είναι ταυτόχρονα και πηνίο στο κύκλωμα L-C που θα σχηματισθεί κλείνοντας τον διακόπτη Δ. Το αβαρές ελατήριο- πηνίο αποτελείται από λεπτό μεταλλικό σύρμα που θα κοπεί αν το διαπεράσει ρεύμα έντασης μεγαλύτερης του I≥10mA.



Η σταθερά του ελατηρίου είναι K=60N/m και ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι L=0,1H. O πυκνωτής έχει χωρητικότητα C=10μF και αρχικά φορτισμένος με φορτίο Q=10μC. Η ράβδος του σχήματος έχει μάζα M=3Kg και μήκος L=4m είναι από μονωτικό υλικό και ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια του ελατηρίου-πηνίου. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που βρίσκεται σε απόσταση d_2=1m από το άκρο που είναι στερεωμένο το ελατήριο-πηνίο. Την στιγμή t=0 κλείνουμε τον διακόπτη και την στιγμή που το ελατήριο κόβεται στο άλλο άκρο της ράβδου πέφτει κατακόρυφα με ταχύτητα μέτρου υ=32m/s ένα σημειακό σώμα m=1Kg που συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο. Να βρεθούν:

A. Η στιγμή που κόπηκε το ελατήριο

B. Ο ρυθμός μεταβολής ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου την στιγμή που κόβεται το ελατήριο

Γ. Την αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου-πηνίου

Δ. Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής για το σύστημα ράβδο-m αμέσως μετά την κρούση.

Ε. Την κινητική ενέργεια του συστήματος όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη για πρώτη φορά.

Για την ράβδο I_{cm}=1/12 M L^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Το ω=1/√L.C=1000rad/sec και το I_{max}=ω.Q=10^{-2} A. Παρατηρώ ότι η μέγιστη ένταση του ρεύματος για το L-C κύκλωμα αντιστοιχεί και στην ένταση του ρεύματος για την οποία κόβεται το πηνίο-ελατήριο. Αρα ο χρόνος που θα χρειασθεί μετά το κλείσιμο του διακόπτη για να κοπεί το ελατήριο-πηνίο θα είναι T/4=π/2000 sec.

B. Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου θα δίνεται από την σχέση $\Delta U_B/\Delta t=-V_C.i=-q.i/C$ αλλά επειδή το ρεύμα εκείνη την στιγμή είναι μέγιστο το φορτίο του πυκνωτή θα είναι

$$q=0C \text{ άρα και } \Delta U_B/\Delta t=0J/sec.$$

Γ. Αν εφαρμόσουμε την συνθήκη ισορροπίας για την ράβδο πριν το κόψιμο του ελατηρίου θα έχουμε Στ(O)=0 άρα

$$-Mgd_1+Kx_{\varepsilon\lambda}.d_2=0 \text{ άρα } -30.1+60x_{\varepsilon\lambda}=0 \text{ άρα } x_{\varepsilon\lambda}=0{,}5m.$$

Δ. Αμέσως μετά την κρούση το ελατήριο έχει κοπεί και οι μοναδικές δυνάμεις που προκαλούν ροπή είναι το βάρος της ράβδου και το βάρος του σώματος μάζας m

$$\Delta L/\Delta t = Mg.d_1 + m.g(L-d_2) = 60Nm$$

Ε. Αν εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα ράβδο-m θα έχουμε Lαρχ=Lτελ άρα

$$m \cdot \upsilon \cdot (L-d_2) = I_{ολ} \cdot \omega_{συστ} \quad (1)$$

$$\text{Το } I_{ολ} = 1/12\ ML^2 + M(L/2-d_2)^2 + m(L-d_2)^2 = 16kg.m^2.$$

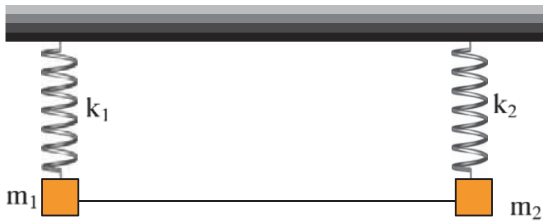
Με αντικατάσταση στην (1) θα έχουμε $\omega_{συστ}$=6r/sec.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση του συστήματος στην κατακόρυφη θέση θα έχουμε $U_ρ + U_m + K_{περ} = K_{περ}'$

άρα η τελική $K_{περ}'$=348J

Τα ελατήρια και η συμβολή των κυμάτων

Τα ελατήρια του σχήματος έχουν σταθερές $K_1=100\pi^2 N/m$ και $K_2=400\pi^2 N/m$.



Τα σώματα $m_1=1kg$ και $m_2=4kg$ ισορροπούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και συνδέονται με ελαστική χορδή που έχει μήκος 2m και μπορεί πάνω της να διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με ταχύτητα v=2m/s. Την χρονική στιγμή t=0 δίνουμε ταυτόχρονα και στις δύο μάζες ταχύτητα μέτρου 3π m/s με φορά προς τα πάνω.

Να σχεδιασθεί η μορφή της ελαστικής μορφής τις χρονικές στιγμές:

i)0,2s ii)0,5s και iii)0,75s.

Ποια θα ήταν η μορφή του σχοινιού στις παραπάνω χρονικές στιγμές αν η δεύτερη μάζα βαλλόταν την στιγμή t=0 προς τα κάτω;

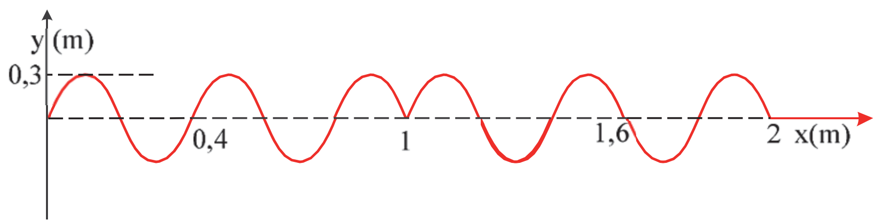
Αρχή των αξόνων να θεωρηθεί το σώμα m_1.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

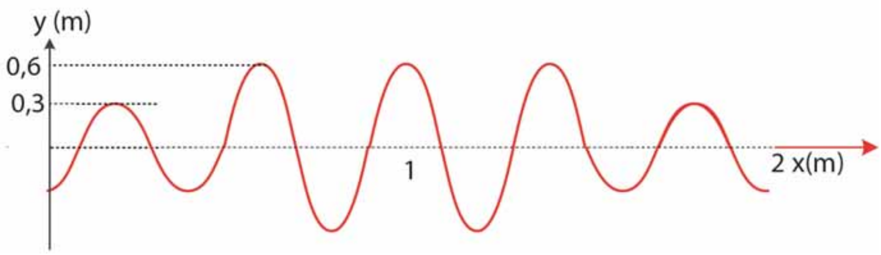
Τα δύο σώματα είναι πηγές κυμάτων που θα διαδοθούν στην ελαστική χορδή. Η συχνότητα του πρώτου κύματος που δημιουργεί το m_1 είναι $f_1=5Hz$ και η συχνότητα του δεύτερου κύματος που δημιουργεί το m_2 είναι επίσης $f_2=f_1=5Hz$. Το πλάτος ταλάντωσης των σωμάτων θα βρεθεί από την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης V_{max}=ω.Α άρα Α=0,3m. Το μήκος κύματος θα βρεθεί από τον νόμο της κυματικής v=λ·f άρα λ=2/5 =0,4m.

Έτσι την χρονική στιγμή t=0,2sec η κάθε πηγή έχει κάνει μία πλήρη ταλάντωση άρα τα κύματα έχουν διαδοθεί το καθένα κατά ένα μήκος κύματος. Ετσι η μορφή της ελαστικής χορδής θα είναι

Την χρονική στιγμή 0,5s το κάθε κύμα έχει διανύσει απόσταση s=2.0,5=1m από την κάθε πηγή. Είναι δηλαδή τα κύματα έτοιμα να συναντηθούν αφού η απόσταση μεταξύ των σωμάτων είναι 2m. Η πηγές έχουν ταλαντωθεί για 2,5Τ άρα το σχήμα της χορδής θα είναι

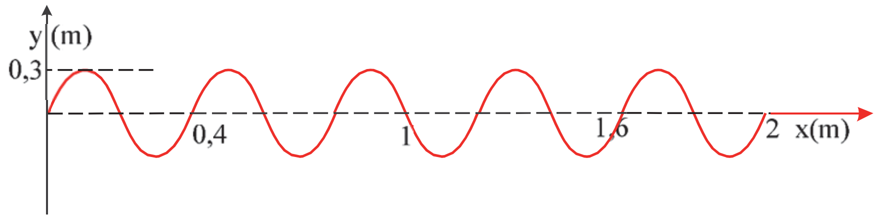


Την χρονική στιγμή 0,75s τα κύματα έχουν διανύσει απόσταση s=2.0,75=1,5m από την κάθε πηγή. Έτσι από το μέσο της χορδής και μέχρι 0,5m από το μέσο και δεξιά και αριστερά του μέσου έχει σχηματισθεί στάσιμο κύμα. Ετσι η μορφή της ελαστική χορδής θα είναι

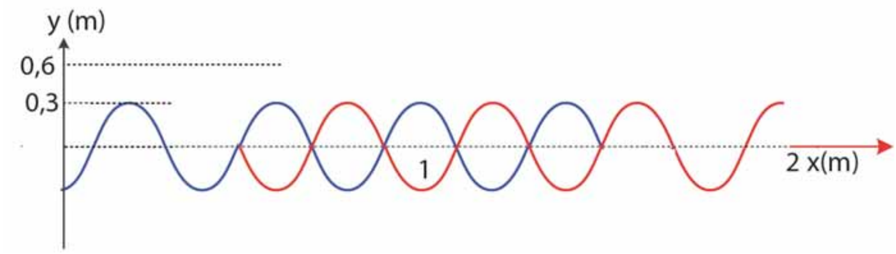


Αν τώρα το σώμα m_2 αρχικά βαλλόταν προς τα κάτω τα σημεία της χορδής θα ξεκινούσαν να ταλαντώνονται αρχικά προς τα κάτω. Ετσι η μορφή της χορδής θα ήταν για την χρονική στιγμή 0,2sec

Ενώ για την χρονική στιγμή 0,5sec θα ήταν



Αν σχεδιάσουμε τα στιγμιότυπα των κυμάτων την χρονική στιγμή t=0,75sec βλέπουμε ότι από την θέση x_1=0,5m έως την θέση x_2=1,5m τα σημεία είναι συνεχώς σε αντίθετη φάση άρα όλα τα σημεία θα είναι ακίνητα. Με κόκκινο χρώμα είναι το κύμα που παράγεται από την πηγή 2 ενώ με μπλε χρώμα το κύμα που παράγεται από την πηγή 1.



Αρα συνολικά η χορδή θα έχει μορφή

Το ελατήριο στο άκρο νήματος.

Μη εκτατό νήμα μήκους l=15cm και με όριο αντοχής μεγαλύτερο από 30N στερεώνεται σε οροφή εργαστηρίου. Στο κάτω μέρος του νήματος στερεώνουμε κατακόρυφο ελατήριο σταθερά K=100N/m και στο κάτω μέρος του ελατηρίου ισορροπεί σώμα μάζας m=1Kg. Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά d=0,2m και το αφήνουμε ελεύθερο την χρονική στιγμή t=0 . Κάποια στιγμή το νήμα χαλαρώνει αλλά δεν εμποδίζει την κίνηση του συστήματος οπότε μετά από λίγο το πάνω άκρο του ελατηρίου φτάνει στην οροφή του εργαστηρίου και χωρίς απώλεια ενέργειας το ελατήριο κολλάει στην οροφή. Να βρεθούν:

Α. Η χρονική εξίσωση του μέτρου της τάσης του νήματος.

Β. Η χρονική στιγμή της επαφής του άκρου του ελατηρίου με την οροφή.

Γ. Η μέγιστη δυναμική του ελατηρίου στην διάρκεια του παραπάνω πειράματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για τη θέση ισορροπίας ισχύει $mg=Kx_1$ άρα $x_1=0,1m$.

Το σύστημα ταλαντώνεται μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος ενώ στην συνέχεια το σώμα θα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω και μέχρι να ακουμπήσει το ελατήριο στην οροφή οπότε θα ξαναρχίσει εκ νέου η ταλάντωση. Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι $\psi=A\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$ και για χρόνο $T/4 + T/12 = T/3$ μιας και η θέση φυσικού μήκους είναι στην

$\psi=A/2$ άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι

$$\psi=0,2\eta\mu(10t+3\pi/2) \quad 0\le t\le \pi/15 \text{ (SI)}$$

Το μέτρο της τάσης του νήματος είναι συνεχώς ίσο με το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου.

Ετσι για την δύναμη του ελατηρίου θα έχουμε

$$F_{\varepsilon\lambda}-mg=-K\psi$$

και μετά την αντικατάσταση της εξίσωσης της απομάκρυνσης θα έχουμε

$$T=F_{\varepsilon\lambda}=10-20\eta\mu(10t+3\pi/2) \quad 0\le t\le \pi/15 \text{ (SI)}$$

Β. Η ταχύτητα του σώματος την στιγμή που το νήμα χαλαρώνει θα βρεθεί με την βοήθεια της ΑΔΕΤ:

$$\tfrac{1}{2} mu_o^2+\tfrac{1}{2} Kx_1^2=\tfrac{1}{2} KA^2$$

θα βρεθεί μετά από τις πράξεις $u_o=\sqrt{3}$ m/s

Το σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω θα χρειασθεί χρόνο που θα βρεθεί από την εξίσωση:

$$l=u_o t-\tfrac{1}{2} gt^2 \quad \text{άρα} \quad t=\frac{\sqrt{3}}{10}s\,.$$

Αρα ο συνολικός χρόνος μέχρι την επαφή του ελατηρίου με την οροφή θα είναι

$$t_{o\lambda}=\left(\frac{\pi}{15}+\frac{\sqrt{3}}{10}\right)s=0,382s$$

Γ. Η ταχύτητα του σώματος θα βρεθεί από την σχέση $u=u_o-gt$ και θα βρεθεί μετά από τις πράξεις $u_{\tau\varepsilon\lambda}=0$m/s. Ετσι εκείνη τη στιγμή το σώμα δεν έχει ταχύτητα και θα εκτελέσει νέα ταλάντωση με νέο πλάτος το $x_1=0,1m$.

Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι τώρα $x_{max}=2x_1=0,2m$.

Η αρχική μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου ήταν $X_{αρχmax}=x_1+A_{αρχ}=0,3m$

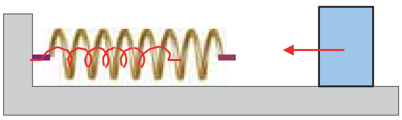
Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι στην διάρκεια του πειράματος την στιγμή t=0 και θα είναι

$$U_{max}= ½ Kx_{αρχmax}^2=4,5J$$

Το σώμα πέφτει σε δύο ελατήρια

Δύο οριζόντια ελατήρια έχουν σταθερές K_1=100N/m και K_2=300N/m και έχουν φυσικό μήκος l_1=1m και l_2=0,8m. Το ένα ελατήριο βρίσκεται μέσα στο άλλο και το ένα άκρο τους είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχωμα.

Ένα σώμα μάζας m=4Kg κινείται με σταθερή ταχύτητα u=2m/s πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με κατεύθυνση προς τα δύο ελατήρια. Τη στιγμή t=0 το σώμα ακουμπά το πρώτο ελατήριο και συνδέεται με αυτό χωρίς απώλεια ενέργειας. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και μετά από λίγο μόλις το σώμα ακουμπήσει και το δεύτερο ελατήριο. Να βρεθούν:



Α. Ποια χρονική στιγμή το σώμα θα ακουμπήσει το δεύτερο ελατήριο;

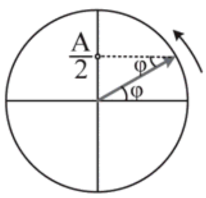
Β. Αν το σύστημα θα εκτελέσει γ.α.τ. και αν εκτελεί γ.α.τ., να βρεθεί η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσής του συστήματος.

Γ. Το πλάτος της τελικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Αρχικά και μέχρι να γίνει η επαφή με το δεύτερο ελατήριο μόνο το ελατήριο με σταθερά K_1 είναι δεμένο με το σώμα μάζας m. Η αρχική ταχύτητα είναι η μέγιστη άρα και u=ω.A, όπου

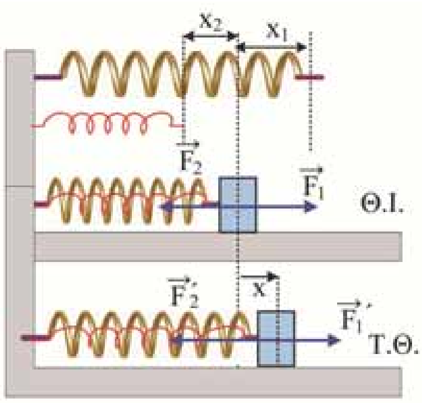
$\omega=\sqrt{\frac{k_1}{m}}=5rad/s$. Κατά συνέπεια A =u/ω=0,4m.



Το σώμα εκτελεί μέρος γ.α.τ. και θα κάνει χρόνο t_1 μέχρι να συναντήσει το δεύτερο ελατήριο μιας και πάει από την ΘΙΤ στην θέση Α/2. Με χρήση του κύκλου αναφοράς της ταλάντωσης βρίσκουμε φ=ωt όπου φ=π/6, οπότε:

$$t_1 = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi/6}{5}s = \frac{\pi}{30}s$$

Β. Μετά την συμπίεση των δύο ελατηρίων και την κίνηση του σώματος προς τα δεξιά, κάποια στιγμή το ελατήριο k_2 τεντώνεται, συνεπώς υπάρχουν δύο δυνάμεις από τα ελατήρια οι οποίες προσπαθούν να σπρώξουν το σώμα προς την ΘΦΜΕ του καθενός από αυτά. Κάπου λοιπόν ανάμεσα από



αυτές τις δύο θέσεις θα υπάρχει η θέση ισορροπίας του συστήματος και για τα μέτρα των δύο δυνάμεων των ελατηρίων θα ισχύει $F_{ελ1}=F_{ελ2}$ άρα

$$K_1.x_1=K_2.x_2 \qquad (1)$$

Όπου $x_1+x_2=l_1-l_2$ (2) και από τις (1) και (2) x_1= 0,15 m και x_2=0,05m

Αν απομακρύνουμε λίγο το σώμα από την ΘΙΤ θα ισχύει

$$ΣF=-F΄_{ελ1}-F΄_{ελ2}=K_1(χ_1-χ)-K_2(χ_2+χ)=-(K_1+K_2)χ \text{ άρα } D=400N/m$$

Γ. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για το σώμα από την στιγμή της πρώτης επαφής με το πρώτο ελατήριο μέχρι τη στιγμή με την επαφή με το δεύτερο ελατήριο θα έχουμε

$$½\, m\cdot u^2 = ½\, m\cdot u_1^{\,2} + ½\, K_1\cdot(l_1-l_2)^2$$

θα βρούμε $u_1=\sqrt{3}$ m/s

Το σώμα μετά και την δεύτερη επαφή του με το δεύτερο ελατήριο εκτελεί πλέον ολοκληρωμένη γ.α.τ. με D=400N/m και ευρισκόμενο απόσταση x_2=0,05m από τη νέα ΘΙΤ της ταλάντωσης.

Εφαρμόζοντας τώρα την ΑΔΕΤ για την νέα ταλάντωση θα έχουμε

$½ D \cdot x_1^2 + ½ m \cdot u_1^2 = ½ DA^2$ και μετά από πράξεις $A=0{,}05\sqrt{13}$ m

Δύο πηγές ήχου και ένας ταλαντωτής.

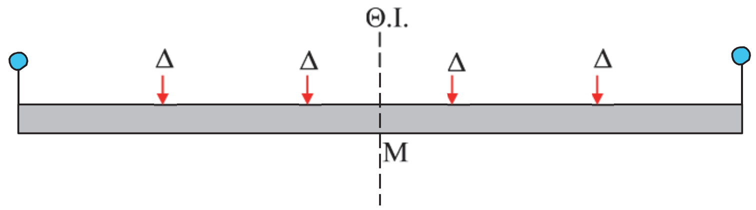
Ανάμεσα σε δύο ακίνητες πηγές (1) & (2) που εκπέμπουν αρμονικό ήχο συχνότητας $F_1=F_2=680Hz$ βρίσκεται ανιχνευτής ήχων μάζας m=0,5kg που μπορεί να ταλαντώνεται οριζόντια έχοντας για θέση ισορροπίας ταλάντωσης το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις δυο πηγές. Στις δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του ο ανιχνευτής ήχων δεν καταγράφει ένταση ήχου και το ίδιο συμβαίνει σε άλλες δύο θέσεις ανάμεσα στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσή του. Αν η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης για τον ανιχνευτή ήχων είναι D=50N/m και ο ταλαντωτής την στιγμή t=0 βρίσκεται στο σημείο Μ και πλησιάζει την πηγή (1) να βρεθούν:

Α. Το πλάτος ταλάντωσης του ανιχνευτή ήχων.
Β. Σε ποιες θέσεις ο ανιχνευτής καταγράφει μέγιστη ένταση ήχου.
Γ. Ποια η εξίσωση της συχνότητας σε συνάρτηση με τον χρόνο που καταγράφει ο ανιχνευτής ήχων για κάθε ήχο που προέρχεται ξεχωριστά από την κάθε πηγή.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου $u_{ηχ}=340m/sec$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ διαδίδονται δύο ηχητικά κύματα με μήκος κύματος που θα βρεθεί από την σχέση $u_{ηχ}=λ.f$ άρα λ=0,5m. Τα κύματα αυτά διαδίδονται αντίθετα με αποτέλεσμα πάνω στην ευθεία που ενώνει τις δύο πηγές να δημιουργηθεί «στάσιμο κύμα». Το μέσο Μ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής «κοιλία» του «στάσιμου κύματος». Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος θα μπορούσαμε να κάνουμε το παρακάτω σχήμα



Οι δύο ακραίοι δεσμοί αποτελούν και τα άκρα της ταλάντωσης του ταλαντωτή.

Ετσι $A=3\lambda/4=0{,}375$m.

Β. Για να καταγράφει μέγιστη ένταση ήχου θα πρέπει να βρίσκεται σε θέση όπου θα αντιστοιχεί κοιλία του «στάσιμου κύματος». Αυτό συμβαίνει στην θέση Θ.Ι.Τ. και σε οριζόντια απόσταση $\lambda/2$ δεξιά και αριστερά της θέσης ισορροπίας της ταλάντωσης του ανιχνευτή ήχων.

Δηλαδή στις θέσεις -0,25m και 0,25m αριστερά και δεξιά του Μ.

Γ. Η εξίσωση ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση

$$U=\omega.A.\sigma\upsilon\nu\omega t=3{,}75\sigma\upsilon\nu 10t \text{ (S.I.)}$$

Ετσι για την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής από την πηγή (1) θα έχουμε

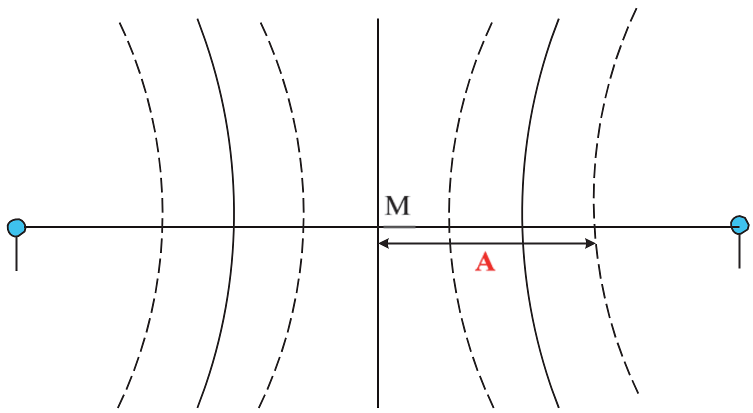
$$F_1=(340+3{,}75\sigma\upsilon\nu 10t).680/340=680+7{,}5\sigma\upsilon\nu 10t \quad \text{(S.I.)}$$

Ετσι για την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής από την πηγή (2) θα έχουμε

$$F_2=(340-3{,}75συν10t).680/340=680-7{,}5συν10t \quad (S.I.)$$

Δεύτερη λύση:

Α. Πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ διαδίδονται δύο ηχητικά κύματα με μήκος κύματος που θα βρεθεί από την σχέση $u_{ηχ}=λ.F$ άρα $λ=0{,}5m$. Οι σύγχρονες πηγές δημιουργούν φαινόμενο συμβολής και οι κροσσοί συμβολής φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Ο κροσσός ενίσχυσης από τον κροσσό απόσβεασης πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές απέχει απόσταση λ/4 έτσι το πλάτος της ταλάντωσης του ανιχνευτή ήχων θα είναι

$$A=3λ/4=3/8m.$$

Β. Για να καταγράφει μέγιστη ένταση ήχου θα πρέπει να βρίσκεται σε θέση όπου έχουμε κροσσό ενισχυτικής συμβολής. Αυτό συμβαίνει στην θέση Θ.Ι.Τ. και σε οριζόντια απόσταση λ/2 δεξιά και αριστερά της θέσης ισορροπίας της ταλάντωσης του ανιχνευτή ήχων. Δηλαδή στις θέσεις -0,25m και 0,25m αριστερά και δεξιά του Μ.

Γ. Η εξίσωση ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση

$$U=\omega.A.\sigma\upsilon\nu\omega t=3{,}75\sigma\upsilon\nu 10t \ \ (S.I.)$$

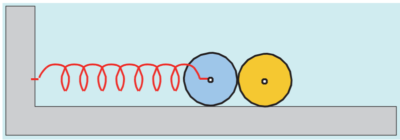
Ετσι για την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής από την πηγή (1) θα έχουμε

$$F_1=(340+3{,}75\sigma\upsilon\nu 10t).680/340=680+7{,}5\sigma\upsilon\nu 10t \quad (S.I.)$$

Ετσι για την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής από την πηγή (2) θα έχουμε

$$F_2=(340-3{,}75\sigma\upsilon\nu 10t).680/340=680-7{,}5\sigma\upsilon\nu 10t \quad (S.I.)$$

Δυο σφαίρες σε επαφή και ταλάντωση



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο μη λείες σφαίρες ίσης μάζας M=1Kg και ίδιας ακτίνας R=0,1m. Η μία σφαίρα είναι συνδεδεμένη με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς K=70N/m που δεν εμποδίζει την περιστροφή της σφαίρας και η δύναμη του ελατηρίου ασκείται στο κέντρο της σφαίρας. Συσπειρώνουμε το ελατήριο σε σχέση με το φυσικό του μήκος κατά x=0,2m και φέρνουμε σε επαφή τις δύο σφαίρες. Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα.

Οι σφαίρες συνεχώς κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν και δεν αναπηδάνε.

Α. Ποια χρονική στιγμή θα χαθεί η επαφή των δύο σφαιρών;

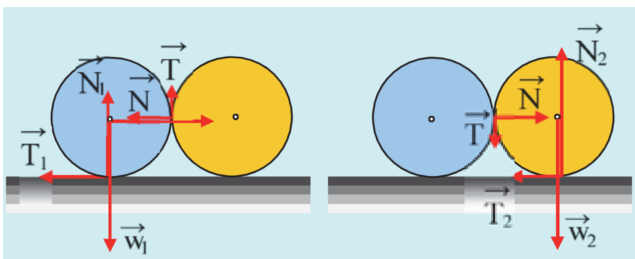
Β. Να βρεθεί το τελικό πλάτος ταλάντωσης του κέντρου μάζας της σφαίρας που είναι δεμένη στο ελατήριο.

Γ. Να βρεθεί η συνάρτηση της απόστασης των δύο κέντρων μάζας των δύο σφαιρών σε σχέση με το χρόνο.

$I_{cm}=0,4\,MR^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στις δύο σφαίρες φαίνονται στο σχήμα



Για την μεταφορική κίνηση των δύο σφαιρών θα έχουμε

$$Kx-N-T_1=M\alpha_{cm} \quad (1)$$
$$N-T_2=M\alpha_{cm} \quad (2)$$

Αν προσθέσουμε τις δύο σχέσεις

$$Kx-T_1-T_2=2M\alpha_{cm} \quad (3)$$

Για την στροφική κίνηση των δύο σφαιρών θα έχουμε

$$T_1R-TR=0{,}4MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_1-T=0{,}4M\alpha_{cm} \quad (4)$$
$$T_2R-TR=0{,}4MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_2-T=0{,}4M\alpha_{cm} \quad (5)$$

Αν προσθέσουμε τις σχέσεις $T_1+T_2=0{,}8M\alpha_{cm}$ (6)

Με την βοήθεια των σχέσεων (3) και (6) θα βρούμε

$$a_{cm}=\frac{kx}{2{,}8M}$$

Για την ταλάντωση των δύο κέντρων μάζας των σφαιρών θα έχουμε

$$\Sigma F= T_1+T_2-Kx+N-N= 0{,}8\frac{kx}{2{,}8}-kx=-\frac{5}{7}kx$$

άρα το σύστημα θα εκτελούσε γατ.

Μόλις το ελατήριο φτάνει στην θέση του φυσικού του μήκους αρχίζει να ασκεί δύναμη αντίθετη της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας που είναι δεμένη με το ελατήριο. Ετσι η σφαίρα αρχίζει να επιβραδύνεται. Εκείνη τη στιγμή οι δύο σφαίρες χάνουν την επαφή τους.

Η στιγμή που θα χαθεί η επαφή των δύο σφαιρών θα είναι

$$t=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{10}s$$

Β. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της κάθε σφαίρας την στιγμή του χάσιμου της επαφής θα είναι: $υ_{cm}=ωΑ=5\cdot 0,2=1m/s$

Η σφαίρα που δεν ήταν δεμένη με το ελατήριο συνεχίζει την κίνησή της στο οριζόντιο επίπεδο εκτελώντας ομαλή στροφική με γωνιακή ταχύτητα

$$\omega=\frac{\upsilon_{cm}}{R}=10r/s$$

και ομαλή μεταφορική κίνηση με $υ_{cm}=1m/s$.

Για τη σφαίρα που είναι δεμένη στο ελατήριο θα ισχύουν

$$Kx\text{-}T=M\alpha_{cm}\ \ (7)\quad TR=0,4MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}\ \ ή\ T=0,4M\alpha_{cm}\ \ (8)$$

Με την βοήθεια των σχέσεων

$$T=\frac{2}{7}kx \quad (9)$$

Για την ταλάντωση του κέντρου μάζας της σφαίρας που είναι δεμένη με το ελατήριο θα έχουμε

$$\Sigma F=T\text{-}kx=-\frac{5}{7}kx$$

άρα το κέντρο μάζας της σφαίρας και πάλι εκτελεί γατ με

$$D=\frac{5}{7}k$$

Η $υ_{cm}=ω΄Α΄$ άρα $Α΄=0,1\sqrt{2}$ m

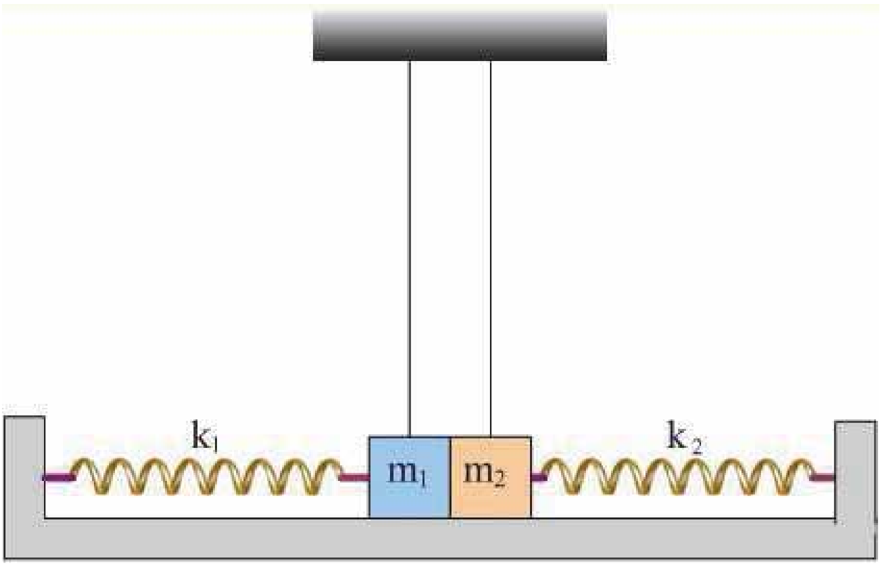
Γ. Η απόσταση των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών θα δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\Delta X=2R=0,2 \quad 0<t<\pi/10 \quad (SI)$$

$$\Delta X=2R+x'\text{-}x=0,2+\upsilon_{cm}\left(t-\frac{\pi}{10}\right)-0,1\sqrt{2}\eta\mu\left[5\sqrt{2}\left(t-\frac{\pi}{10}\right)\right] \quad t>\frac{\pi}{10}\ \ (S.I.)$$

Δυο ταλαντώσεις και δυο κύματα.

Στο παρακάτω σχήμα τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος και τα σώματα ισορροπούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



Τα ελατήρια έχουν σταθερές $K_1=\pi^2 N/m$ και $K_2=4\pi^2 N/m$ και οι μάζες $m_1=m_2=1Kg$. Πάνω στα σώματα m_1 και m_2 είναι στερεωμένες δύο κατακόρυφες ελαστικές χορδές μήκους L=5m όπου μπορούν να διαδοθούν εγκάρσια αρμονικά κύματα με ταχύτητα υ=1m/sec.

Την χρονική στιγμή t=0 δίνουμε ταχύτητα μέτρου υ=0,1πm/sec στο σώμα M_1 προς τα αριστερά και μετά την επιστροφή του στη αρχική του θέση τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά.

A. Να βρεθεί η περίοδος της περιοδικής κίνησης που θα εκτελέσει το σύστημα των δύο μαζών.
B. Να σχεδιασθούν οι απομακρύνσεις των ταλαντώσεων για τα δύο

σώματα μέχρι την στιγμή t_2 που η διαταραχή στην πρώτη χορδή θα έχει φτάσει στο άλλο της άκρο.

Γ. Να σχεδιασθούν οι μορφές των δύο χορδών τη χρονική στιγμή t_2.

Να θεωρηθεί αμελητέα η χρονική διάρκεια της κάθε κρούσης των σωμάτων και θετική φορά των απομακρύνσεων η φορά προς τα δεξιά.

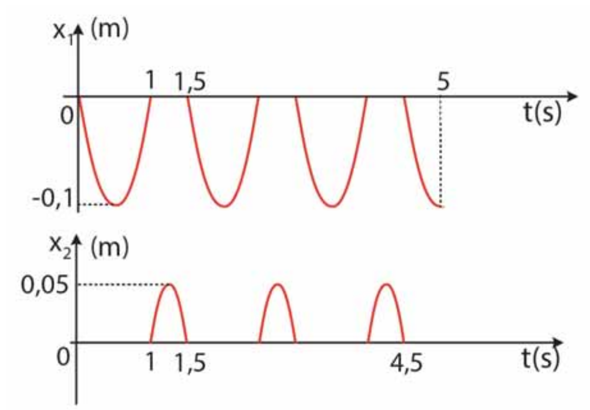
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το σώμα m_1 είναι δεμένο στο ελατήριο K_1 και θα εκτελέσει μισή γ.α.τ. μέχρι να επιστρέψει στην αρχική του θέση. Η περίοδος θα βρεθεί από τη σχέση $T_1=2\pi\sqrt{m_1/K_1}$ άρα $T_1=2sec$. Η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι και η μέγιστη της ταλάντωσης άρα $\upsilon=\omega_1.A_1$ άρα $A_1=0{,}1m$. Τα σώματα έχουν ίδιες μάζες άρα μετά την ελαστική τους κρούση θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Έτσι το σώμα με μάζα m_2 θα αρχίσει να εκτελεί και αυτό μισή γ.α.τ. με $T_2=2\pi\sqrt{m_2/K_2}$ άρα $T_2=1sec$. Η αρχική ταχύτητα του σώματος m_2 μετά την ελαστική κρούση είναι και η μέγιστη της ταλάντωσης άρα $\upsilon=\omega_2.A_2$ άρα $A_2=0{,}05m$. Ο χρόνος επανάληψης του φαινομένου θα είναι

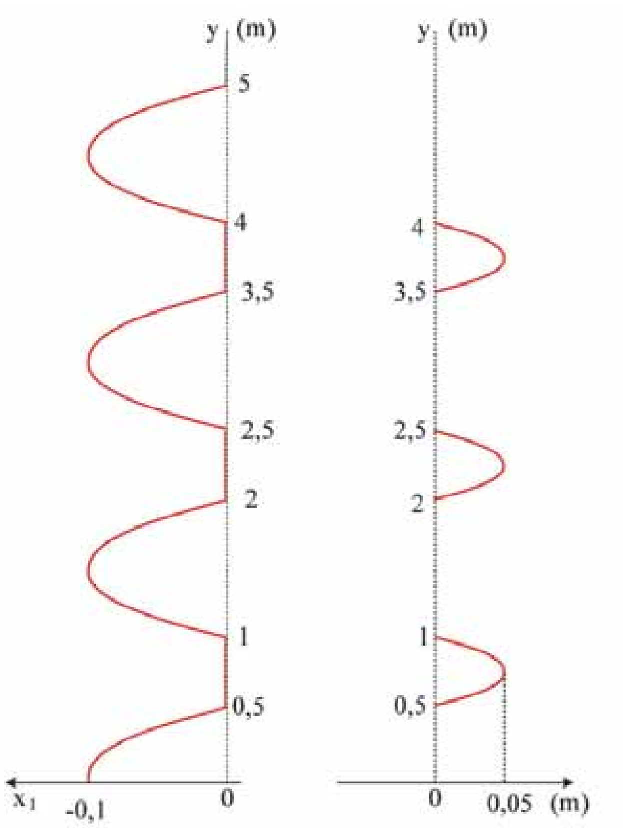
$$T_\alpha=T_1/2 +T_2/2= 1{,}5sec.$$

Β. Για να φτάσει η διαταραχή στην άλλη άκρη της χορδής θα χρειασθεί χρόνος $t=L/U=5sec$.

Για να αρχίσει η ταλάντωση του δεύτερου σώματος θα χρειασθεί χρόνος $t_3=T_1/2=1sec$. Οι γραφικές παραστάσεις των απομακρύνσεων των δύο σωμάτων θα είναι θεωρώντας θετική φορά την φορά προς τα δεξιά.

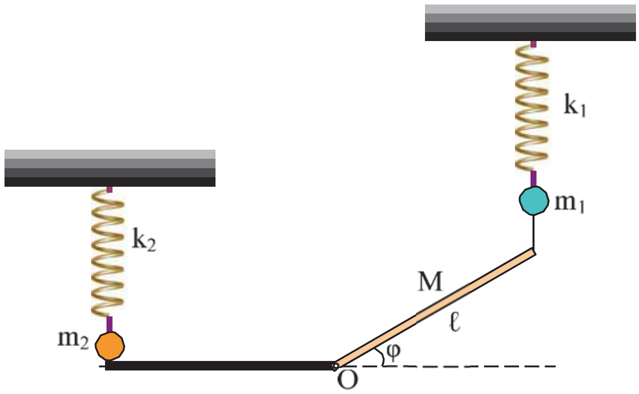


Τα «μήκη κύματος» σε κάθε χορδή θα είναι $\upsilon=\lambda_1.F_1$ άρα $\lambda_1=2m$ και $\upsilon=\lambda_2.F_2$ άρα $\lambda_2=1m$. Η μορφή των δύο χορδών θα είναι



Μια ράβδος που κινούμενη προκαλεί δύο ταλαντώσεις

Δίνεται το παρακάτω σχήμα



Η ράβδος έχει μάζα M=10Kg και ισορροπεί με την βοήθεια νήματος και οριζόντιου καρφιού που βρίσκεται στο σημείο Ο. Το μήκος της ράβδου είναι L=0,6m και η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\varphi=30^o$.Το ελατήριο έχει σταθερά K_1=500N/m και είναι δεμένο με το σώμα μάζας m_1=5Kg και το σύστημα ισορροπεί κατακόρυφα. Στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Ο ισορροπεί άλλο σώμα μάζας m_2=10Kg δεμένο από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς K_2=1000N/m. Η απόσταση του m_2 από το Ο είναι L=0,6m. Κόβουμε το νήμα που συνδέει τη ράβδο με το m_1. Η ράβδος όταν φτάνει στην οριζόντια θέση συγκρούεται με την μάζα m_2 και μετά την κρούση τους η ράβδος σταματάει στιγμιαία. Αν θεωρηθεί θετική φορά προς τα πάνω να βρεθούν:

Α. Οι εξισώσεις απομάκρυνσης ταλάντωσης των m_1 και m_2. Να θεωρηθεί t=0 η στιγμή που αρχίζει το κάθε σώμα την ταλάντωσή του.

Β. Να βρεθεί η απώλεια της ενέργειας του συστήματος κατά την διάρκεια της κρούσης της ράβδου με το σώμα m_2.

Γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης που θα εκτελούσε ένα σώμα αν εκτελούσε ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις με εξισώσεις απομάκρυνσης τις δύο παραπάνω του ερωτήματος Α.

Δίνεται για την ράβδο $I_o=1/3ML^2$. Το σώμα m_2 να θεωρηθεί σημειακό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την ισορροπία της ράβδου θα πάρουμε από την ισορροπία των ροπών γύρω από το σημείο Ο:

$$-Mg.L\sigma\upsilon\nu\varphi/2+T\cdot L\sigma\upsilon\nu\varphi=0 \text{ άρα } T=50N$$

Για την αρχική ισορροπία του m_1 θα έχουμε:

$$m_1.g+T=K_1x_{\varepsilon\lambda1} \text{ άρα } x_{\varepsilon\lambda1}=0{,}2m.$$

Μετά το κόψιμο του νήματος για την νέα θέση ισορροπίας του m_1 θα έχουμε $m_1.g=K_1x_{\varepsilon\lambda2}$ άρα $x_{\varepsilon\lambda2}=0{,}1m$.

Την στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα m_1 δεν έχει ταχύτητα άρα βρίσκεται στην ακραία θέση και μάλιστα στην Θ.Ε.Α αφού θετική φορά την ορίζουμε προς τα πάνω. Αρα $A_1=0{,}2\text{-}0{,}1=0{,}1m$. Αρα η εξίσωση απομάκρυνσης για το σώμα m_1 θα είναι:

$\psi_1=0{,}1\eta\mu(10t+3\pi/2)$ (S.I.)

Από την ΑΔΕ για την ράβδο από την αρχική θέση μέχρι την θέση που θα συγκρουσθεί με το m_2 θα έχουμε

$$M \cdot g \cdot L/4 = ½ \ I \cdot \omega^2 \text{ άρα } \omega = 5 rad/sec.$$

Για την κρούση θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ:

$$L_{αρχ} = L_{τελ}$$

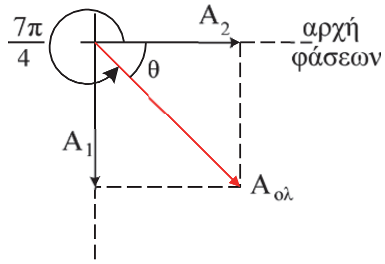
$$\text{άρα } I\omega = m_2 \cdot \upsilon_2 \cdot L \text{ Αρα } \upsilon_2 = 1 m/sec.$$

Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη για την δεύτερη ταλάντωση αφού το σώμα βρίσκεται στην ΘΙΤ και μάλιστα με θετική ταχύτητα $\upsilon_2 = \omega \cdot A_2$ άρα $A_2 = 0,1 m$. Αρα η εξίσωση απομάκρυνσης θα είναι για το δεύτερο σώμα: $\psi_2 = 0,1 ημ10t$ (S.I.).

Β. Από την ΑΔΕ για την κρούση θα έχουμε:

$$½ \ I\omega^2 = 1/2 m_2 \cdot \upsilon_2^2 + Q_{κρούσης} \text{ θα πάρουμε } Q = 5J$$

Με την βοήθεια του παρακάτω διαγράμματος με τα στρεφόμενα διανύσματα θα έχουμε για την συνισταμένη ταλάντωση:



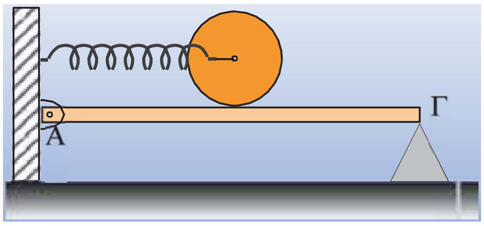
$$A_{ολ} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0,1\sqrt{2} m$$

$$\text{και } εφθ = A_1/A_2 = 1 \text{ άρα } θ = 45^o .$$

Άρα η συνολική εξίσωση: $\psi_{ολ} = 0,1\sqrt{2} ημ(10t + 7\pi/4)$ (S.I.)

Στροφική Ταλάντωση, αλλά και Ισορροπία.

Ομογενής ράβδος ΑΓ έχει μάζα M_1=3kg και μήκος L=3m μπορεί να ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια άρθρωσης στο σημείο Α και με λείο κατακόρυφο υποστήριγμα στο σημείο Γ. Πάνω στη ράβδο ισορροπεί δίσκος μάζας M_2=1kg και ακτίνας R=0,2m.Στο κέντρο μάζας του δίσκου έχουμε περάσει το άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου φυσικού μήκους L_o=1,5m και σταθεράς K=150N/m έτσι ώστε ο δίσκος να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου βρίσκεται ακλόνητα στερεωμένο στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με το σημείο Α της ράβδου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Απομακρύνουμε το κέντρο μάζας του δίσκου κατά x_1=0,3m και την χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο οπότε ο δίσκος κυλίεται συνεχώς χωρίς να ολισθαίνει πάνω στην ράβδο. Να βρεθούν:

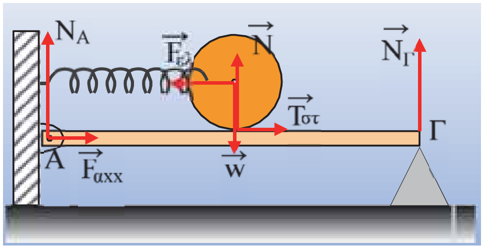
Α. Τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στα σημεία Α και Γ πριν απομακρυνθεί ο δίσκος.

Β. Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου σαν συνάρτηση του χρόνου καθώς και η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης σαν συνάρτηση του χρόνου.

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση του μέτρου της δύναμης που ασκείται στην άρθρωση σε συνάρτηση του χρόνου μετά την χρονική στιγμή 0.

Για τον δίσκο $I_{cm}=0,5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α. Για την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα θα έχουμε

$$N_A+N_\Gamma=(M_1+M_2)g \ (1)$$

και με την βοήθεια της συνθήκης ισορροπίας

$\Sigma\tau_{(A)}=0$ ή $N_\Gamma L-(M_1+M_2)gL/2=0$ θα βρούμε $N_\Gamma=20N$ και

με την βοήθεια της σχέσης (1) θα βρούμε $N_A=20N$.

Β. Θα πρέπει να βρούμε τι είδους κίνηση θα εκτελέσει το κέντρο μάζας τους δίσκου Για μία τυχαία θετική απομάκρυνση του δίσκου θα έχουμε:

$$\Sigma F=T_{\sigma\tau}-Kx \ (1)$$

Με την βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα για την στροφική και την μεταφορική κίνηση του δίσκου θα έχουμε:

$$Kx-T_{\sigma\tau}=M_2a_{cm} \ (2) \quad T_{\sigma\tau}R=0,5M_2R^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \ (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) θα βρούμε $T_{\sigma\tau}=Kx/3$ (4)

και με αντικατάσταση στην (1) θα βρούμε:

$$\Sigma F=-2Kx/3=-100x$$

άρα το κέντρο μάζας του δίσκου θα εκτελεί γ.α.τ. με D=100N/m.

Την χρονική στιγμή t=0 το κέντρο μάζας του δίσκου δεν έχει ταχύτητα άρα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του δηλαδή στην θέση x=+A=0,3m. Αρα η εξίσωση απομάκρυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου θα είναι:

$$x=0{,}3\eta\mu(10t+\pi/2) \text{ (S.I.)}$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα δίνεται από την σχέση

$$U_{\varepsilon\lambda}= ½\ Kx^2=6{,}75\eta\mu^2(10t+\pi/2) \text{ (S.I.)}$$

μιας και το x της ταλάντωσης ταυτίζεται με το x του ελατηρίου.

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση

$$U_{\tau\alpha\lambda}= ½\ Dx^2=4{,}5\eta\mu^2(10t+\pi/2) \text{ (S.I.)}$$

Γ. Για την ισορροπία της ράβδου και μετά την χρονική στιγμή t=0 θα έχουμε

Στον οριζόντιο άξονα xx΄θα υπάρχει η αντίδραση της στατικής τριβής που θα έχει φυσικά μέτρο

$$T_{\sigma\tau'}=Kx/3=50x \text{ (S.I.)}$$

και για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει στην άρθρωση να ασκείται η $F_{axx'}=-T_{\sigma\tau'}$

ή το μέτρο της να δίνεται από την σχέση με το χρόνο

$$F_{axx'}=|15\eta\mu(10t+\pi/2)| \text{ (S.I.)}$$

Την ίδια στιγμή και με την βοήθεια της σχέσης $\Sigma\tau_{(\Gamma)}=0$ θα έχουμε

$$-F_{a\psi\psi'}L + M_1 gL/2 + M_2 g(L/2 - x) = 0$$

θα βρούμε $F_{a\psi\psi'}=20-10x/3$ και με αντικατάσταση του x θα βρούμε

$$F_{a\psi\psi'} = 20 - \eta\mu(10t+\pi/2) \quad \text{(S.I.)}$$

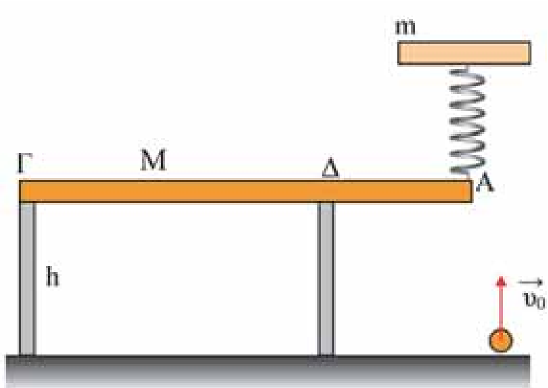
Ετσι το συνολικό μέτρο της δύναμης στην άρθρωση θα βρεθεί με την βοήθεια του Π.Θ. και θα έχει μορφή

$$F_a = \sqrt{225\eta\mu^2\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)+\left(20-\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} \rightarrow$$

$$F_a = \sqrt{226\eta\mu^2\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)-40\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)+400} \quad \text{(S.I.)}$$

Ταλάντωση και ισορροπία ράβδου

Ομογενής ράβδος ΑΓ αμελητέου πάχους έχει μήκος l=4m και μάζα 4kgr στηρίζεται στο άκρο Γ και σε ένα υποστήριγμα Δ με την απόσταση ΓΔ=3m με τη βοήθεια δύο στηριγμάτων ύψους h=3m. Στο άκρο Α και πάνω από



τη ράβδο υπάρχει ελατήριο φυσικού μήκους 0,95m και σταθεράς Κ=200N/m. Πάνω στο ελατήριο ισορροπεί ένα σώμα μάζας m=1kgr.

Να βρεθούν:

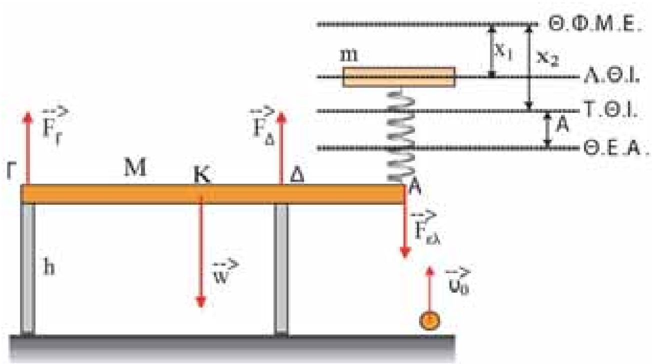
A. Ποια η μέγιστη ταχύτητα ενός βλήματος μάζας m=1Kgr, που βάλλεται από το έδαφος και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας m που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το σημείο Α, για να μην χάνει την επαφή της η ράβδος με το υποστήριγμα Γ.

B. Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η ράβδος από το υποστήριγμα στο σημείο Γ σε συνάρτηση με το χρόνο. $g=10m/sec^2$.Θετική φορά να θεωρηθεί η φορά της αρχικής ταχύτητας του βλήματος και t=0 στιγμή της πλαστικής κρούσης των δύο σωμάτων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να μην χαθεί η επαφή με το υποστήριγμα θα πρέπει η δύναμη $F_Γ \to 0$. Για αυτήν την οριακή δύναμη μπορούμε να εφαρμόσουμε την συνθήκη ισορροπίας $Στ_{(Δ)}=0$ Αρα $M.g.(ΚΔ)-F_{ελ}.(ΔΑ)=0$.

Αρα $40-200X_{ελmax}=0$ άρα $X_{ελmax}=0,2m$.



Για την ισορροπία του σώματος πάνω στο ελατήριο θα έχουμε $m.g=Kx_1$ άρα $x_1=0,05m$. Για την ισορροπία του σώματος-βλήματος πάνω στο ελατήριο θα έχουμε

$2m.g=Kx_2$ άρα $x_2=0,1m$.

Για την ταλάντωση του σώματος-βλήματος μετά την πλαστική κρούση θα πάρουμε από την ΑΔΕΤ. Το πλάτος θα πρέπει να είναι $A=x_{ελmax}-x_2=0,2-0,1=0,1m$ γιατί θέλουμε μόλις να μην χαθεί η επαφή με το υποστήριγμα Γ. Παρατηρούμε επίσης ότι το ελατήριο δεν ξεπερνάει την ΘΦΜΕ άρα δεν κινδυνεύει η ράβδος να ¨σηκωθεί¨ στο σημείο Δ.

$½ K (x_2-x_1)^2+½\ 2\ m\ U_{συστ}^2=½ K A^2$ θα πάρουμε

$U_{συστ}=\sqrt{3}/2$ m/sec

Για την πλαστική κρούση και από την ΑΔΟ θα έχουμε

$U=2mU_{συστ}$ άρα $U=\sqrt{3}$m/sec

Αν για το βλήμα εφαρμόσουμε ΑΔΕ για την άνοδό του θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος θα πάρουμε

$$½\, mU_o^2=mg(h+l_o-x_1) + ½\, m.U^2$$

Μετά τις πράξεις $U_o=9$m/sec.

Β. Για το συσσωμάτωμα θα έχουμε εξίσωση απομάκρυνσης $X=Αημ(ωt+φ_o)$ για t=0 x=0,05m και U>0 $ω=\sqrt{K/2m}$ έτσι η εξίσωση θα είναι X=0,1ημ(10t+π/6) (S.I.).

Για την δύναμη του ελατηρίου που ασκείται στο συσσωμάτωμα θα έχουμε $F_{ελ}$ -2mg=-K.X άρα η $F_{ελ}$=20-20ημ(10t+π/6) (S.I.)

Το μέτρο αυτής της δύναμης μεταφέρεται στο άλλο άκρο του ελατηρίου στο σημείο Α.

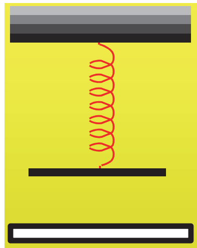
Αν εφαρμόσουμε την συνθήκη ισορροπίας για την ράβδο θα έχουμε

$$Στ_{(Δ)}=0 \text{ άρα } -F_{ελ}.(ΔΑ) +Mg.(ΚΔ) -F_Γ.(ΓΔ)=0$$

$$-20+20ημ(10t+π/6) + 40-F_Γ.3=0$$

$$\text{Άρα } F_Γ=20/3 +20/3\, ημ(10t+π/6) \text{ (S.I.)}$$

Ταλαντωτής με φίλτρο.



Μία λεπτότατη ράβδος μήκους L=0,5m μάζας M=1Kg τρυπιέται στο κέντρο μάζας και κρεμιέται από ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς K=100N/m έτσι ώστε η ράβδος να μπορεί να ταλαντώνεται κατακόρυφα αλλά και να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές παραμένοντας συνεχώς οριζόντια γύρω από το κάτω άκρο του ελατηρίου ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου στερεώνεται στο ταβάνι όπως το φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ανεβάζουμε τη ράβδο στη θέση όπου το ελατήριο να αποκτά το φυσικό του μήκους και με την βοήθεια μίας στιγμιαίας ροπής ζεύγους δυνάμεων η ράβδος αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω=20r/sec ενώ την ίδια χρονική στιγμή t=0 η ράβδος αφήνεται ελεύθερη. Στην θέση ισορροπίας της ράβδου υπάρχει οριζόντια σχισμή με πλάτος όσο ακριβώς και το πλάτος της ράβδου.

Α. Να αποδειχθεί ότι η ράβδος δε θα συγκρούεται με την οριζόντια σχισμή.

Β. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση του μέτρου της συνολικής ταχύτητας ενός από τα άκρα της ράβδου.

Δ. Μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική γωνιακή ταχύτητα-συχνότητα της ράβδου;

$I_{cm}=1/12\ ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η ράβδος θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μιας και η συνολική ροπή όλων των δυνάμεων που ασκούνται στην ράβδο είναι ίση με το 0 ενώ ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της ράβδου θα εκτελεί γ.α.τ. με πλάτος $A=Mg/K=0{,}1m$. Για να φτάσει το κέντρο μάζας της ράβδου στην ΘΙΤ για πρώτη φορά θα χρειασθεί χρόνος $t=T/4=\pi/20$ sec.

Στον παραπάνω χρόνο η ράβδος θα έχει εκτελέσει γωνία $\theta=\omega \cdot T/4=\pi$ rad δηλαδή μισή στροφή. Ετσι η ράβδος θα περάσει από την σχισμή χωρίς να συγκρουσθεί με αυτή. Η ράβδος θα ξαναπεράσει από την ΘΙΤ μετά από χρόνο Τ/2 άρα η ράβδος θα έχει εκτελέσει $\theta'=\omega \cdot T/2=2\pi$ rad δηλαδή μία ολόκληρη περιστροφή. Δηλαδή η ράβδος θα φτάνει στην θέση ισορροπίας της μετά από μία ολόκληρη περιστροφή της γύρω από το κέντρο μάζας της. Ετσι δεν θα υπάρχει σύγκρουση της ράβδου με την σχισμή.

Β. Η ράβδος θα έχει ελάχιστη κινητική ενέργεια όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσή της $K_{min}=\frac{1}{2} I\omega^2=25/6$ J ενώ η μέγιστη κινητική ενέργεια θα έχει η ράβδος όταν το κέντρο μάζας της ράβδου βρίσκεται στην ΘΙΤ.

$$\text{Αρα } K_{max}=\frac{1}{2} M\upsilon_{max}^2+\frac{1}{2} I\omega^2=14/3 \text{ J}$$

Γ. Η συνολική ταχύτητα ενός από τα άκρα της ράβδου θα δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας περιστροφής αλλά και της ταχύτητας του κέντρου μάζας και επειδή οι δύο ταχύτητες είναι συνεχώς κάθετες θα ισχύει:

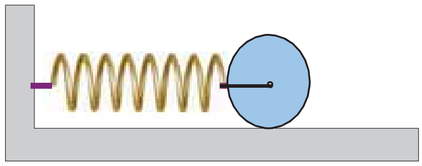
$$\upsilon_{o\lambda} = \sqrt{\left(\omega \cdot \frac{L}{2}\right)^2 + \upsilon_{max}^2 \sigma\upsilon\nu^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}$$ άρα μετά από πράξεις

$$\upsilon_{o\lambda} = \sqrt{25 + \sigma\upsilon\nu^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)} \text{ (SI)}$$

Δ. Δεν πρέπει να συγχέουμε έννοιες σαν την γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης $\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$ που ένα μονόμετρο μέγεθος με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου ω που είναι ένα κορυφαίο διανυσματικό μέγεθος όπως αναφέρει και ο καλός μας φίλος Θρασύβουλος Μαχαίρας στο πόνημά του «Θέματα Φυσική Παρανοήσεις & προτάσεις υπέρβασής τους»

Δεν μπορούμε λοιπόν να προσθέσουμε ανόμοια μεταξύ τους πράγματα….

Τρία στερεά σε δύο ταλαντώσεις



Τρία ίδιας μάζας M=3/14 Kg και ίδιας ακτίνας στερεά σώματα, ένας λεπτός δίσκος, μία σφαίρα και ένα δαχτυλίδι μπορούν να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το καθένα από τα παραπάνω σώματα δένεται με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς K=120N/m με το κέντρο του κάθε στερεού ενώ η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι μόνιμα στερεωμένη. Το κάθε στερεό ισορροπεί και στο καθένα από αυτά και την στιγμή t=0 ασκούμε στο κέντρο του σταθερή οριζόντια δύναμη F=60N έτσι ώστε το κάθε ελατήριο να μπορεί να επιμηκύνεται.

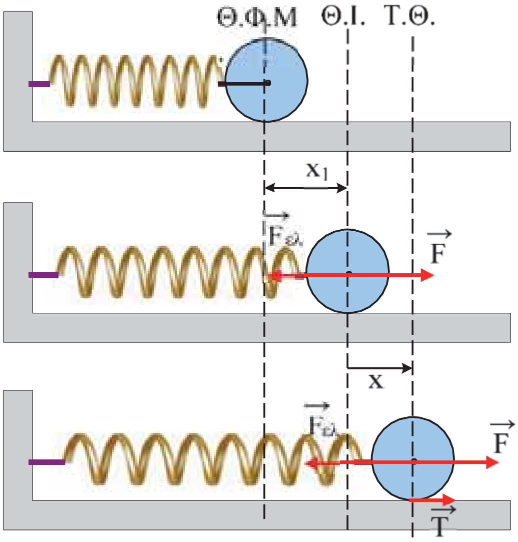
A. Να αποδειχθεί ότι το κέντρο μάζας του κάθε στερεού εκτελεί γ.α.τ. καθώς και να βρεθεί πόσο θα είναι τότε το πλάτος ταλάντωσης του κέντρου μάζας του κάθε στερεού;
B. Μετά από πόσο χρόνο πρέπει να καταργηθεί η δύναμη στο καθένα από τα παραπάνω στερεά έτσι ώστε να σταματήσει η περιοδική κίνηση του κάθε στερεού. Ποιο κέντρο μάζας κάποιου από τα παραπάνω στερεά θα μπορούσε να σταματήσει πρώτο;Σε πόσο χρόνο;
Γ. Αν καταργηθεί η εξωτερική δύναμη θα συνεχίσει το κέντρο μάζας του κάθε στερεού να εκτελεί γ.α.τ.Σε ποια θέση σε σχέση με το φυσικό μήκος του κάθε ελατηρίου θα πρέπει να καταργηθεί η κάθε δύναμη για ταλαντώνεται το σύστημα με την μέγιστη ενέργεια ταλάντωσης;

Δίνονται ο ροπές αδράνειας $I_{δαχ}=MR^2$ $I_{δισκ}=0,5MR^2$ και $I_{σφ}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για τη θέση ισορροπίας του κέντρου μάζας θα ισχύει:

$F=kx_1$ (1)



Για την κίνηση του κέντρου μάζας του κάθε στερεού ισχύει $ΣF=Ma_{cm}$ και για μία τυχαία θετική απομάκρυνση:

$$k(x+x_1)-F-T=Ma_{cm} \quad (2)$$

Για την στροφική κίνηση του κάθε στερεού ισχύει

$Στ=Ια_{γων}$ άρα $TR=λMR^2α_{γων}$ άρα $T=λMa_{cm}$ (3)

Από (1),(2) & (3) $T=λκx/(1+λ)$ (5)

Για την ταλάντωση και για μία θετική απομάκρυνση με τη βοήθεια της σχέσης (5) θα έχουμε:

$$ΣF=F+T-F_{ελ}=-κx/(λ+1)$$

Αρα το κέντρο μάζας του κάθε στερεού εκτελεί γ.α.τ. με $D=k/(λ+1)$

Το κάθε στερεό την στιγμή t=0 ήταν ακίνητο άρα το κέντρο μάζας του βρισκόταν στην θέση x=-A. Η θέση ισορροπίας για κάθε στερεό βρισκόταν στην θέση ΣF=0 άρα

$F=F_{ελ}$ άρα $60=120x_1$ άρα $x_1=A=0,5m$.

Β. Αν καταργηθεί η εξωτερική δύναμη F τότε για να σταματήσει την περιοδική κίνησή το κέντρο μάζας του κάθε στερεού θα πρέπει να ισορροπεί. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει το εκτελεί ακέραιο αριθμό ταλαντώσεων. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει για το χρόνο εφαρμογής της δύναμης

t=$t = NT = N \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{M(1+\lambda)}{k}}$ με N να ανήκει στους ακεραίους.

Ο μικρότερος χρόνος φυσικά αντιστοιχεί σε μία ταλάντωση και στην μικρότερη τιμή του λ. Αρα το κέντρο μάζας της σφαίρας θα μπορούσε να σταματήσει πρώτο σε χρόνο

$$t=\pi/10 \text{ sec.}$$

Γ. Μετά την κατάργηση της εξωτερικής δύναμης η θέση ισορροπίας του κάθε συστήματος μεταφέρεται στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Για την κίνηση του κέντρου μάζας του κάθε στερεού ισχύει $\Sigma F=Ma_{cm}$ και για μία τυχαία θετική απομάκρυνση $kx-T=Ma_{cm}$ (6)

Για την στροφική κίνηση του κάθε στερεού ισχύει

$$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{άρα } TR=\lambda MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{άρα } T=\lambda Ma_{cm} \ (7)$$

$$\text{Από (6) \& (7)} \quad T=\lambda\kappa x/(1+\lambda) \ (8)$$

Για την ταλάντωση και για μία θετική απομάκρυνση με τη βοήθεια της σχέσης (8) θα έχουμε

$$\Sigma F=T-F\varepsilon\lambda=-\kappa x/(\lambda+1)$$

Άρα και πάλι το κέντρο μάζας του κάθε στερεού εκτελεί γ.α.τ. με $D=k/(\lambda+1)$.

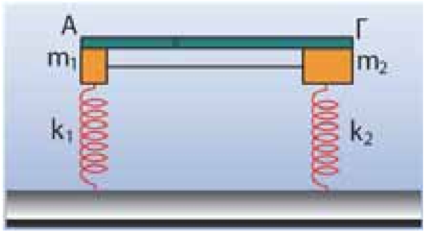
Η ενέργεια ταλάντωσης ισοδυναμεί με το έργο της εξωτερικής δύναμης F.

Το έργο αυτό θα είναι μέγιστο όταν η μετατόπιση του σώματος είναι η μέγιστη και αυτό συμβαίνει μέχρι το κάθε στερεό να φτάσει στην μέγιστη θέση απομάκρυνσης.

Άρα όταν το ελατήριο έχει την μέγιστη δυνατή του απομάκρυνση δηλαδή $x_{max}=2A=1m$.

Φούρκα που δημιουργεί ταλαντώσεις.

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος ΑΓ έχει μάζα M=3Kg και μήκος L=0,8m ισορροπεί οριζόντια. Η ράβδος δεν είναι ομογενής αλλά το κέντρο μάζας βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση L/3 από το άκρο της Α. Η ράβδος ισορροπεί ενώ ακουμπά στα δύο σημειακά σώματα m_1=1Kg στο άκρο Α και m_2=3Kg στο άκρο Γ με την βοήθεια δύο ιδανικών κατακόρυφων ελατηρίων με σταθερές K_1=100N/m και K_2=300N/m όπως στο παρακάτω σχήμα

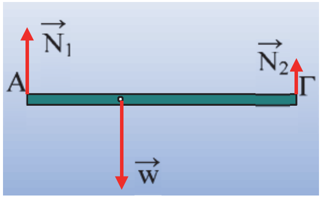


Ενώνουμε τα δύο σώματα με αβαρή ελαστική χορδή όπου μπορεί να διαδοθεί αρμονικό κύμα με ταχύτητα u=1/π m/s. Την χρονική στιγμή t=0 αφαιρούμε αυτόματα την ράβδο ΑΓ με αποτέλεσμα τα σώματα m_1 και m_2 που είναι δεμένα στα ελατήρια να εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις.
Να βρεθούν:

- Α. Η αρχική παραμόρφωση του κάθε ελατηρίου
- Β. Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για καθένα από τα δύο σώματα αν υποθέσουμε ότι η θετική φορά είναι προς τα πάνω
- Γ. Η μορφή της χορδής την στιγμή που θα συναντηθούν τα δύο κύματα.

Απάντηση:

Α. Από τις συνθήκες ισορροπίας για την ράβδο θα έχουμε



$N_1+N_2=W$ (1) $-WL/3+N_2L=0$ (2)

μετά από τις πράξεις θα βρούμε $N_1=20N$ και $N_2=10N$

Για το κάθε ελατήριο θα έχουμε αντίστοιχα για την ισορροπία του

$N_1'+m_1g=K_1x_1$ άρα $x_1=0,3m$ ενώ

για το δεύτερο σώμα $N_2'+m_2g=K_2x_2$ άρα $x_2=4/30$ m

Β. Μετά την αφαίρεση της ράβδου καταργούνται οι δυνάμεις αντίδρασης άρα αλλάζει η θέση ισορροπίας του κάθε σώματος. Ετσι οι νέες θέσεις ισορροπίας θα βρεθούν από τις σχέσεις

$m_1g=K_1x_3$ άρα $x_3=0,1m$ $m_2g=K_2x_4$ άρα $x_4=0,1m$.

Επειδή το κάθε σώμα την στιγμή της απομάκρυνσης της σανίδας δεν έχει ταχύτητα θα βρίσκεται σε ακραία θέση άρα το

$$A_1=x_1-x_3=0,2m \quad \text{και} \quad A_2=x_2-x_4=\frac{1}{30}m.$$

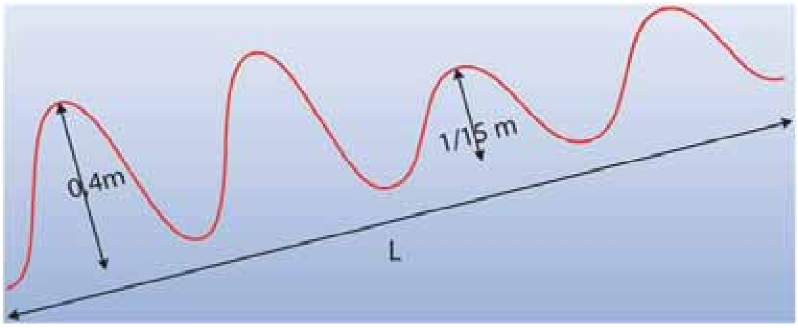
Επειδή έχουμε ορίσει θετική φορά είναι η προς τα πάνω θα έχουμε για το κάθε σώμα

$$y_1=0,2\eta\mu\left(10t+\frac{3\pi}{2}\right) \quad \& \quad y_2=\frac{1}{30}\eta\mu\left(10t+\frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

Γ. Το μήκος κύματος για το κάθε κύμα θα δίνεται από το νόμο της κυματικής u=λf και επειδή οι δύο πηγές έχουν την ίδια περίοδο τα μήκη κύματος θα είναι ίδια με λ=0,2m.Το κάθε κύμα θα κάνει χρόνο

$$t=\frac{L}{2\upsilon}=0,4\pi \text{ sec}$$

που αντιστοιχεί σε δύο πλήρεις ταλαντώσεις της κάθε πηγής. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι θέσεις ισορροπίας δεν είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έτσι το σχήμα τη χορδής θα είναι το παρακάτω



Ανάποδες στροφές

Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από δύο κατακόρυφα τεταρτοκύκλια με ακτίνες R_1=2m και R_2= 0,25 m που συνδέονται μεταξύ τους με οριζόντιο τμήμα . Από την κορυφή του πρώτου τεταρτοκύκλιου αφήνουμε σφαίρα μάζας m και ακτίνας r=0,1 m.

Η σφαίρα σε όλη την διάρκεια της αρχικής της κίνησης και ενώ βρίσκεται σε επαφή με τα τεταρτοκύκλια ή το οριζόντιο επίπεδο κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Α. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος του κέντρου μάζας της σφαίρας από το οριζόντιο επίπεδο μετά το χάσιμο της επαφής με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο.

Οταν η σφαίρα φτάσει στο ανώτερο σημείο της με την βοήθεια κατάλληλης στιγμιαίας ροπής ζεύγους η σφαίρα αλλάζει στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα.

Β. Να βρεθεί το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ώστε η σφαίρα μετά την επανοδό της να κυλίσει χωρίς να ολισθήσει πάνω στα τεταρτοκύκλια. Δίνεται η μάζα της σφαίρα m=1Kg και για την σφαίρα

$I_{cm}=0{,}4\cdot m\cdot r^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση και μέχρι την θέση που η σφαίρα χάνει την επαφή της με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο

$$m.g.R_1=m.g.R_2 +½\ m.U^2 +½\ 0{,}4.m.r^2.\omega^2$$

θα βρούμε μετά από τις πράξεις U=5m/s.

Το βάρος είναι η μοναδική δύναμη που δέχεται η σφαίρα μετά το χάσιμο της επαφής της σφαίρας με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο.

Ετσι θα εκτελέσει επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση μέχρι το ανώτερο σημείο της τροχιάς ενώ ταυτόχρονα θα εκτελεί και ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα που θα βρεθεί από την σχέση

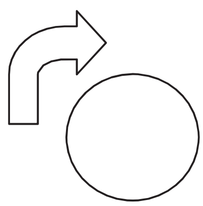
$$U=\omega.r \quad \omega=50r/s.$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την στιγμή που χάνεται η επαφή και μέχρι το ανώτερο σημείο θα έχουμε:

$$m.g.R_2 +½.m.U^2 + ½\ I.\omega^2=m.g.H_{max}+½\ I.\omega^2$$

άρα μετά από πράξεις H_{max}=1,5m

Β. Η σφαίρα ανεβαίνοντας έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα με φορά όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα

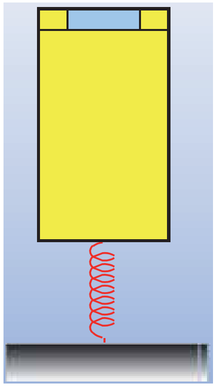


Η στιγμιαία ροπή ζεύγους πρέπει να προκαλέσει αλλαγή στην γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε κατά την κάθοδο της σφαίρας και μπαίνοντας στο μικρό τεταρτοκύκλιο η ταχύτητα του σημείου επαφής της σφαίρας με το τεταρτοκύκλιο να είναι 0.

Αυτό θα συμβεί αν η γωνιακή ταχύτητα αλλάξει φορά αλλά όχι μέτρο.

Αρα $\Delta L = L_{\tau\varepsilon\lambda} - L_{\alpha\rho\chi} = I.\omega - (-I\omega) = 2.I.\omega = 0{,}4 Kg.m^2/sec$

Ανάποδη επαφή.



Στο ανώτερο σημείο κυλινδρικού κουτιού μάζας M=4Kg κρατάμε χωρίς να είναι κολλημένο ένα δεύτερο σώμα μάζας m=1Kg και αμελητέου πάχους. Το κατώτερο σημείο του κυλινδρικού κουτιού είναι δεμένο στο πάνω μέρος κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K=100N/m. Ανυψώνουμε το σύστημα ώστε το ελατήριο να έχει επιμηκυνθεί κατά x_1 αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο.

Κάποια στιγμή το δεύτερο σώμα χάνει την επαφή του με το κουτί έχοντας ταχύτητα $υ=2(3)^{1/2}$m/s και στην συνέχεια σώματα συγκρούονται εντελώς πλαστικά την στιγμή που το κουτί σταματάει στιγμιαία για πρώτη φορά.

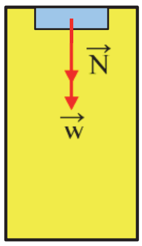
Α. Σε ποια θέση χάθηκε η επαφή των δύο σωμάτων;

Β. Πόση είναι η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου;

Γ. Ποιο το εσωτερικό ύψος του κυλινδρικού κουτιού;

Δ. Ποιο το νέο πλάτος ταλάντωσης του συστήματος;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



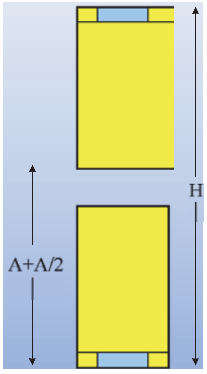
Α. Για την κάθοδο του σώματος και αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα πάνω από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε-N–mg=m(-$ω^2$ψ) άρα N=m$ω^2$ψ-mg. Η επαφή θα χαθή όταν N=0 άρα όταν ψ=g/$ω^2$ ψ=(M+m)g/K δηλαδή στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Β. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την κάθοδο του συστήματος μέχρι την στιγμή που θα χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων θα έχουμε

$(M+m)gx_1 + ½ Kx_1^2 = ½(M+m)υ^2$ θα βρούμε $x_1=0,42m$

Γ. Μόλις χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων η θέση ισορροπίας του κουτιού θα βρίσκεται στην θέση

$x_2=Mg/K=0,4m$.



Με τη βοήθεια της ΑΔΕΤ για το κουτί θα έχουμε

$½ Kx_2^2 + ½ Mυ^2 = ½ KA^2$

και μετά από πράξεις Α=0,8m.

Το κουτί τη στιγμή της αποχώρησης του σώματος μάζας m βρίσκεται στην θέση +Α/2 και η σύγκρουση θα γίνει στην θέση –Α. Με τη βοήθεια της εξίσωσης

$A/2=Aημωt$ θα βρούμε $t=T/12$.

Έτσι ο χρόνος μετάβασης του κουτιού αλλά και του σώματος από την αρχική θέση στην θέση –Α θα είναι

$t=T/12+T/4=T/3=2π/15=0,42s$.

Το σώμα μάζας m θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση άρα η κατακόρυφη απομάκρυνσή του θα δοθεί από τη σχέση

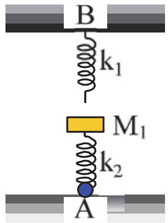
$H=υt + ½ gt^2$ και μετά από πράξεις Η=2,33m.

Με τη βοήθεια του σχήματος $L_{κουτιού}=H-3A/2=1,13m$

Δ. Η ταχύτητα του σώματος μάζας m την στιγμή της κρούσης θα είναι $υ_2=υ+gt=7,66m/s$. Η θέση ισορροπίας του συστήματος θα μεταφερθεί σε απόσταση από το φυσικό μήκος του ελατηρίου στην θέση $x_3=(M+m)g/K=0,5m$. Για την κρούση και με τη βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε $mυ_2=(M+m)υ_K$ άρα $υ_K=1,53m/s$.

Διπλή αλλαγή θέσης ισορροπίας

Τα ελατήρια στο παρακάτω σχήμα έχουν ίδιο φυσικό μήκος L_o=0,6m έχουν σταθερές $K_1=K_2$=200N/m και είναι στερεωμένα στην ίδια κατακόρυφο στα σημεία Α και Β και σε απόσταση ΑΒ=1,2m.



Πάνω στο ελατήριο με σταθερά K_1 ισορροπεί δεμένο σημειακό σώμα μάζας M_1=2Kg. Από τη θέση Α εκτοξεύουμε κατακόρυφα δεύτερο σημειακό μάζας M_2=2Kg με αρχική ταχύτητα $υ_o$=4 m/s με αποτέλεσμα τα δύο σώματα να συγκρουστούν πλαστικά. Αν μετά την πλαστική κρούση το σύστημα των δύο σωμάτων ενώνεται ακαριαία και χωρίς απώλεια ενέργειας με το δεύτερο ελατήριο σταθεράς K_1 να βρεθούν:

Α. Η απώλεια ενέργειας κατά την πλαστική κρούση

Β. Η ενέργεια ταλάντωσης που θα εκτελέσει τελικά το σύστημα

Γ. Ο χρόνος μετά την κρούση που θα χρειασθεί το σύστημα των δύο σωμάτων μέχρι να αποκτήσει για πρώτη φορά την μέγιστη ταχύτητά του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Από την ισορροπία του σώματος M_1 θα έχουμε $K_2.x_1=M_1.g$ άρα x_1=0,1m.

Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του σώματος M_2 θα έχουμε

$$½.M_2 \cdot υ_o^2 = ½\, M_2 \cdot υ^2 + M_2 \cdot g \cdot (L_o - x_1)$$

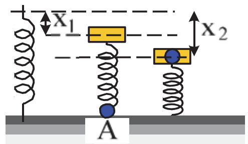
μετά από πράξεις $υ=\sqrt{6} m/s$.

Αν εφαρμόσουμε ΑΔΟ για την πλαστική κρούση $M_2 \cdot υ=(M_1+M_2) \cdot υ_{συσ}$ θα βρούμε:

$$υ_{συσ}= \sqrt{1,5} m/s$$

Αν πάρουμε μία ΑΔΕ για την κρούση θα έχουμε

$$\frac{1}{2}M_2υ^2 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)υ_{συσ}^2 + Q_{κρούσης}$$, θα βρεθεί $Q_{κρουσης}=3J$



B. Με την αύξηση της μάζας εξαιτίας της κρούσης έχουμε και αλλαγή της θέσης ισορροπίας της πρώτης ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σύστημα. Για την νέα θέση ισορροπίας θα έχουμε

$$K_2 \cdot x_2=(M_1+M_2) \cdot g \text{ άρα } x_2=0,2 \text{ m.}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για την αρχική ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα και πριν γίνει η σύγκρουση με το δεύτερο ελατήριο θα έχουμε

$$\frac{1}{2}M_{ολ}υ_{συστ}^2 + \frac{1}{2}K_2(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}K_2A^2 \text{ άρα } A=0,2\text{m.}$$

Παρατηρώ ότι το πλάτος ταυτίζεται με την συσπείρωση του ελατηρίου για την θέση ισορροπίας της πρώτης ταλάντωσης. Αυτό σημαίνει ότι το ελατήριο τελικά μόλις και φτάνει στην θέση του φυσικού του μήκους. Η θέση όμως αυτή είναι η θέση του φυσικού μήκους και του δεύτερου ελατηρίου μιας και η απόσταση AB=2L_o. Άρα εκείνη την στιγμή πάνω στο σώμα που δεν έχει στιγμιαία ταχύτητα γανζώνεται χωρίς απώλεια ενέργειας και το δεύτερο ελατήριο με σταθερά K_1. Μετά το γάντζωμα και του δεύτερου ελατηρίου θα αλλάξει και πάλι η θέση ισορροπίας εξαιτίας της αλλαγής της σταθεράς επαναφοράς της ταλάντωσης. Η νέα θέση ισορροπίας θα βρεθεί από την συνθήκη ισορροπίας

$$(K_2+K_1).x_3=(M_1+M_2).g \text{ άρα } x_3=0{,}1\text{m}.$$

Το x_3 ταυτίζεται με το νέο πλάτος της νέας ταλάντωσης

Η ενέργεια της τελικής ταλάντωση θα είναι

$$E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)A^2_{\tau\varepsilon\lambda} = 2\text{J}.$$

Γ. Παρατηρώ ότι μετά την πρώτη κρούση το σώμα θα εκτελέσει δύο διαφορετικές αλλά διαδοχικές γ.α.τ.

Η πρώτη είναι ταλάντωση με περίοδο:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M_1+M_2}{K_2}} = \frac{2\pi}{5\sqrt{2}}s \text{ και στην συνέχεια με } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M_1+M_2}{K_1+K_2}} = \frac{2\pi}{5}s\,.$$

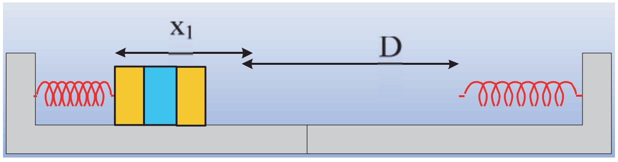
Η θέση της κρούσης ισοδυναμεί με το μισό του αρχικού πλάτους άρα θα χρειασθεί χρόνο $T_1/6$ μέχρι να φτάσει στην θέση μέγιστης αρχικής απομάκρυνσης. Στην συνέχεια θα χρειασθεί χρόνο $T_2/4$ μέχρι να φτάσει για πρώτη φορά στην τελική θέση ισορροπίας του από την ακραία του θέση.

Αρα ο συνολικός ζητούμενος χρόνος θα είναι:

$$t_{o\lambda} = \frac{T_1}{6} + \frac{T_2}{4} = \left(\frac{2\pi}{30\sqrt{2}} + \frac{\pi}{20}\right)s$$

Διπλό χάσιμο επαφής.

Τρία σημειακά σώματα με μάζες m_1=1Kg m_2=2Kg και m_3=1kg βρίσκονται σε επαφή έχοντας συσπειρώσει κατά x_1=0,2m το οριζόντιο ελατήριο σταθερά K_1=100N/m του σχήματος. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο.



Το σώμα μάζας m_1 είναι δεμένο στο ελατήριο και την χρονική στιγμή t=0 το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και όταν χαθεί η πρώτη επαφή των σωμάτων το σώμα μάζας m_3 καρφώνεται χωρίς απώλεια ενέργειας σε ένα δεύτερο ελατήριο σταθεράς K_2=300N/m. Η απόσταση των δύο φυσικών μήκων των δύο ελατηρίων εί- ναι D=π/5 m να βρεθούν:

Α. Ποια στιγμή τα σώματα θα συμβεί ο τελικός αποχωρισμός;

Β. Ποια τα τελικά πλάτη ταλάντωσης των σωμάτων που ταλαντώνονται αν το σώμα μάζας m_2 μετά τον αποχωρισμό του από το σώμα μάζα m_3 απομακρυνθεί από το σύστημα;

Γ. Ποια θα μπορούσε να ήταν η μέγιστη και ποια η ελάχιστη απόσταση των δύο σωμάτων που ταλαντώνονται;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η πρώτη απώλεια επαφής θα συμβεί στη θέση φυσικού μήκους του πρώτου ελατηρίου αφού μετά απ' αυτήν το μέτρο της ταχύτητας του $Σ_1$ θα αρχίσει να μειώνεται λόγω της δράσης της δύναμης από το ελατήριο ενώ τα δύο σώματα $Σ_2$ και $Σ_3$ δεν δέχονται οριζόντιες δυνάμεις που μπορούν να μειώσουν το μέτρο της ταχύτητάς τους και θα συνεχίσουν κάνοντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.

Έτσι με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για την πρώτο μέρος της κίνησης θα έχουμε

$$\frac{1}{2} K x_1^2 = \frac{1}{2} m_{ολ} υ^2 \text{ θα βρούμε } υ=1m/s$$

Ο χρόνος όπου θα κινούνται και τα τρία σώματα σαν είναι θα είναι $Δt_1=T/4=π/10$ sec

Τα δύο σώματα μετά τον πρώτο αποχωρισμό κινούνται σαν ένα σώμα μέχρι να συγκρουστούν με το ελατήριο.

Ο χρόνος αυτός είναι $Δt_2=D/U=π/5$ sec.

Η επαφή των δύο σωμάτων θα χαθεί και πάλι στην θέση φυσικού μήκους του δεύτερου ελατηρίου και αυτό θα συμβεί όταν περάσει χρόνος $Δt_3=T_2/2=π/10$ sec

Αρα ο τελικός αποχωρισμός των σωμάτων θα συμβεί την χρονική στιγμή

$$t=Δt_1+Δt_2+Δt_3=4π/10 \text{ sec}$$

B. Το πρώτο σώμα χάνει την επαφή του με τα υπόλοιπα σώματα έχοντας ταχύτητα $υ=1m/s$ στην θέση του φυσικού μήκους του πρώτου ελατηρίου. Άρα η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης έτσι

$$υ=ω_1 A_1 \quad \text{άρα } A_1=0,1m.$$

Το τρίτο σώμα και πάλι χάνει την επαφή του με το δεύτερο σώμα στην θέση φυσικού μήκους του δεύτερου ελατηρίου έχοντας και πάλι ταχύτητα μέτρου υ=1m/s.

Ετσι και πάλι είναι η μέγιστη άρα θα έχουμε

$$υ=ω_3 A_3 \quad \text{άρα } A_3=\sqrt{3}/30 \text{ m}$$

Γ. Η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων θα μπορούσε να συμβεί όταν και τα δύο σώματα βρισκόταν ταυτόχρονα στην μέγιστη απομάκρυνση το ένα και στην ελάχιστη απομάκρυνση το δεύτερο και θα ήταν

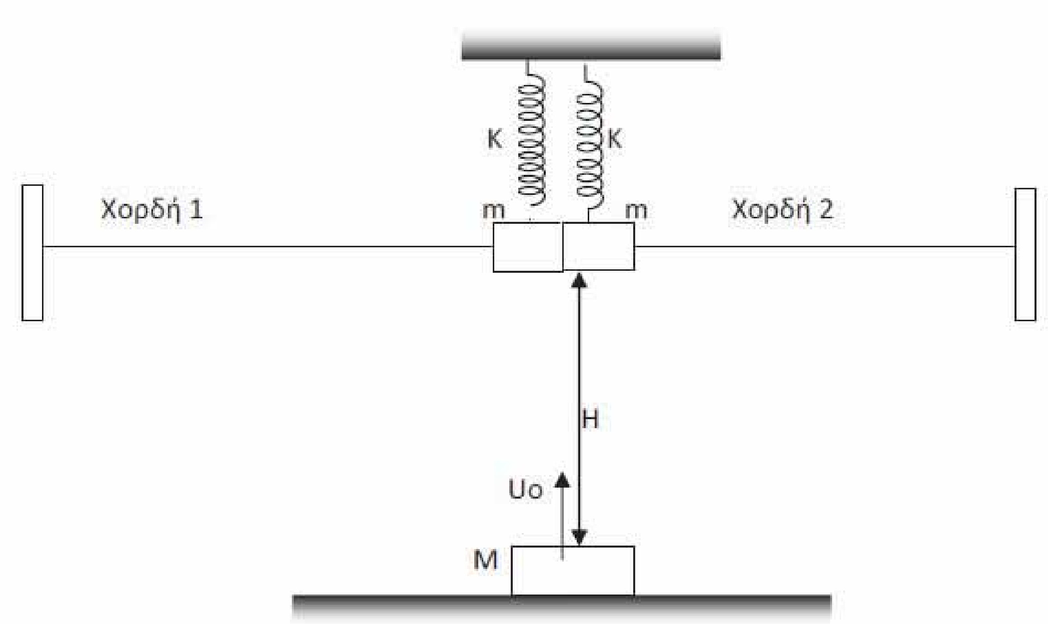
$$x_{max}=D+A_1+A_2=π/5 +0,1+(3)1/2/30=0,788m$$

Ενώ η ελάχιστη απόσταση των δύο σωμάτων θα μπορούσε να συμβεί αν και τα δύο σώματα βρισκόταν ταυτόχρονα το ένα στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης και το άλλο στην θέση της ελάχιστης απομά- κρυνσης έτσι

$$x_{min}=D-A_1-A_2=0,468m.$$

Δύο κύματα και μια κρούση.

Τα κατακόρυφα ιδανικά ελατήρια του παρακάτω σχήματος έχουν σταθερά $K=100\pi^2 N/m$. Στο κάτω άκρο του κάθε ελατηρίου δένεται σώμα μάζας m=1Kg και το κάθε σώμα ισορροπεί σε ύψος H πάνω από το έδαφος. Δύο οριζόντιες ελαστικές χορδές από διαφορετικό υλικό δένονται στο κάθε σώμα όπως στο παρακάτω σχήμα. Εκτοξεύουμε ταυτόχρονα το κάθε σώμα μάζας m με κατάλληλη ταχύτητα μέτρου U με φορά προς τα πάνω και τη χρονική στιγμή t=0 τα σώματα μόλις και φτάνουν στη θέση φυσικού μήκους του κάθε ελατηρίου.



Την στιγμή t=0 εκτοξεύουμε κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα μέτρου $U_o=2{,}5m/sec$ δεύτερο σώμα μάζας M=2Kg από το έδαφος και τη χρονική στιγμή t=0,25sec τα τρία σώματα συγκρούονται ελαστικά ενώ το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων μάζας m και το κέντρο μάζας του σώματος μάζας

Μ βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Στις δύο μεγάλου μήκους ελαστικές χορδές μπορούν να διαδίδονται εγκάρσια αρμονικά κύματα με ταχύτητες U_1=5m/sec στην χορδή 1 και U_2=10m/sec στη χορδή 2.

Να χαραχθούν οι μορφές των χορδών τις χρονικές στιγμές

Α. $t_1=0$

Β. $t_2= 0,25sec$

Γ. $t_3=0,35sec$

Το κάθε σώμα m να θεωρηθεί σημειακό και ότι τα δύο σώματα μάζας m δεν συγκρούονταιμεταξύ τους. Να θεωρηθεί το $\pi^2=10$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το κάθε σώμα μάζα m είναι η πηγή εγκάρσιων κυμάτων που θα διαδοθούν στις δύο χορδές. Η συχνότητα της πηγής άρα και του κάθε κύματος θα βρεθεί

$$f=1/2\pi\sqrt{m/K}=5Hz.$$

Το πλάτος ταλάντωσης του κάθε σώματος θα βρεθεί από τη σχέση ισορροπίας για το σώμα μάζας m

$$m.g=K.A \text{ άρα } A=0,01m.$$

Οι εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας για το κάθε σώμα μάζας m θα δίνονται από τις σχέσεις

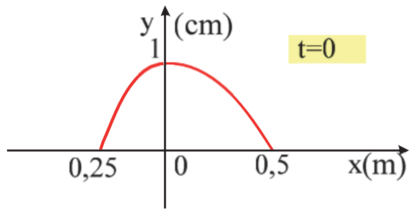
$$\psi=0,01\eta\mu(10\pi t+\pi/2) \text{ (S.I.) και}$$

$$U=\pi/10 \text{ συν}(10\pi t+\pi/2) \text{ (S.I.)}$$

Από τον νόμο της κυματικής για τα δύο κύματα θα έχουμε

$U_1=\lambda_1.f$ άρα $\lambda_1=1m$ και αντίστοιχα για τη χορδή 2 $\lambda_2=2m$.

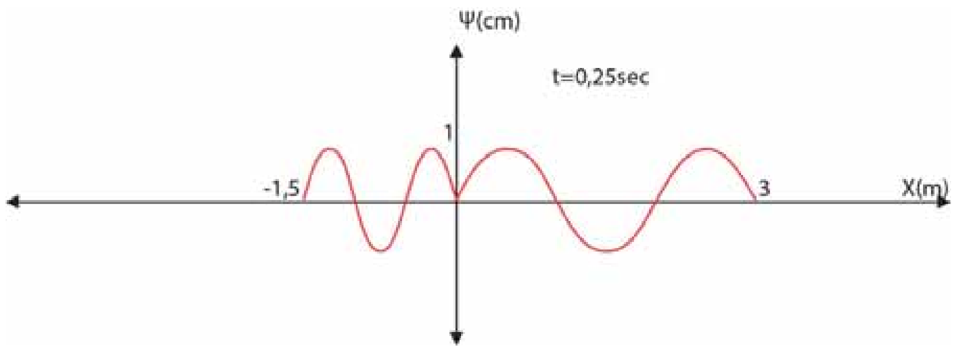
Την χρονική στιγμή t=0sec οι πηγές θα βρίσκονται στην Θ.Μ.Α. έτσι οι μορφές των δύο χορδών θα είναι



B. Την χρονική στιγμή $t_2=0{,}25sec$ κύμα στη χορδή 1 έχει διαδοθεί κατά $\Delta x_1=U_1.t_2=1{,}25m$ ενώ στη χορδή 2 $\Delta x_2=U_2.t_2=2{,}5m$.

Ετσι το κύμα στη χορδή 1 έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x_1=-1{,}5m$ και το κύμα στη χορδή 2 έχει φτάσει μέχρι τη θέση $\chi_2=3m$.

Η μορφή των δύο χορδών θα έχει μορφή



Την χρονική στιγμή t=0,25sec θα γίνει η κρούση.

Με αντικατάσταση στις εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας για το σώμα μάζας m θα βρούμε ψ=0m και U=-π/10 m/sec δηλαδή το σώμα βρίσκεται στην ΘΙΤ και πλησιάζει προς το έδαφος.

Την ίδια στιγμή το σώμα μάζας Μ από το νόμο της ταχύτητας στην κατακόρυφη βολή προς τα πάνω θα μας δώσει

$U_2 = U_o - g.t = 0 m/sec.$

Τα τρία σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και τα σώματα με μάζες m έχουν άθροισμα μαζών ίσο με την μάζα Μ.

Ετσι θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Δηλαδή τα σώματα με μάζας m (η πηγή του κάθε κύματος) θα σταματήσουν ακαριαία και το σώμα μάζας Μ θα κάνει μία κατακόρυφη βολή προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα μέτρου $V = \pi/10$ m/sec.

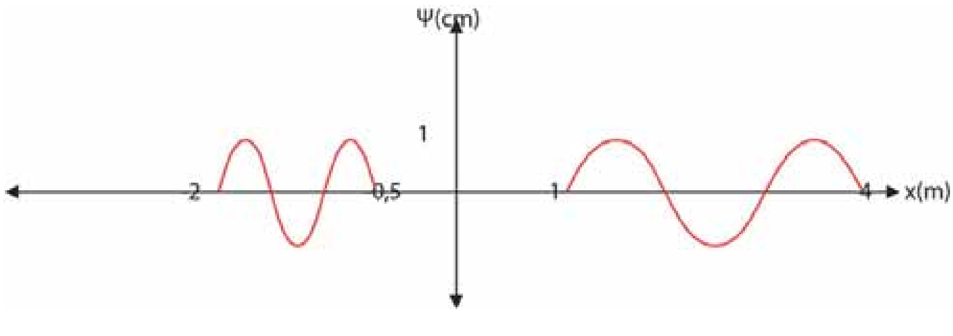
Οι πηγές λοιπόν των δύο κυμάτων θα σταματήσουν στην ΘΙΤ.

Ετσι παύουν πλέον να παράγονται κύματα.

Γ. Την χρονική στιγμή $t_3 = 0{,}35$sec κύμα στη χορδή 1 έχει διαδοθεί κατά $\Delta x_3 = U_1.t_3 = 1{,}75$m ενώ στη χορδή 2 $\Delta x_4 = U_2.t_3 = 3{,}5$m.

Ετσι το κύμα στη χορδή 1 έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x_3 = -2$m και το κύμα στη χορδή 2 έχει φτάσει μέχρι τη θέση $\chi_4 = 4$m.

Η μορφή των δύο χορδών θα είναι



Δύο πηγές που δεν ξεκίνησαν ταυτόχρονα

Δύο πηγές κυμάτων δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα u=1m/sec. Την στιγμή t=0 αρχίζει η πηγή O_1 να ταλαντώνεται κατακόρυφα με εξίσωση $\psi_1=0{,}02\eta\mu2\pi t$ (S.I.). Η πηγή O_2 ξεκινάει την κατακόρυφη ταλάντωσή της την χρονική στιγμή $t_1=2sec$ και έχει εξίσωση $\psi_2=0{,}02\eta\mu2\pi t'$ (S.I.) με $t'=t-2$ (S.I).
Δύο σημεία Α και Β απέχουν αντίστοιχα αποστάσεις $R_1=3m$ $R_2=1m$ το σημείο Α και $R_1'=6{,}5\ m$ $R'_2=6m$ το σημείο Β από τις πηγές O_1 και O_2 αντίστοιχα.

Α. Να βρεθούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης των σημείων Α και Β.

Β. Να παρασταθούν γραφικά οι φάσεις των σημείων Α και Β σε συνάρτηση με το χρόνο.

Γ. Πόσες φορές το σημείο Α είχε δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U=8\pi^2\cdot10^{-7}J$ μέχρι την χρονική στιγμή $t_2=5sec$ αν υποθέσουμε ότι στο υλικό αυτό σημείο αντιστοιχεί στοιχειώδες τμήμα μάζας $\Delta m=0{,}001kg$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Από τις εξισώσεις των πηγών θα βρεθούν A=0,02m και ω=2π r/s. Από τον νόμο της κυματικής u=λ.f άρα λ=1m.
Για να φτάσει το κάθε κύμα στο σημείο Α θα χρειασθεί χρόνο $\Delta t_1=R_1/u=3s$ και $\Delta t_2=R_2/u=1s$ αλλά επειδή η δεύτερη πηγή ξεκίνησε καθυστερημένα κατά $t_1=2s$ την ταλάντωσή της τα δύο

κύματα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο σημείο Α την χρονική στιγμή t_2=3sec. Η εξίσωση του κύματος που δημιουργεί η πηγή O_1 θα είναι $\psi_1=0,02\eta\mu 2\pi(t-R_1)$ (S.I.)
ενώ η εξίσωση του κύματος που ξεκινάει από την πηγή O_2 θα έχει μορφή $\psi_2=0,02\eta\mu 2\pi(t'-R_2)$ (S.I.) με $t'=t-2$ (S.I.).
Με βάση την αρχή της επαλληλίας όταν θα ξεκινήσει η συμβολή των δύο κυμάτων η εξίσωση της απομάκρυνσης θα δίνεται από την σχέση

$$\psi_{ολ}=0,04\sigma\upsilon\nu(\pi R_2+2\pi-\pi R_1).\eta\mu(2\pi t-\pi R_1-\pi R_2-2\pi) \quad (S.I.)\ (1)$$

Με αντικατάσταση των R_1 & R_2 για το σημείο Α θα έχουμε την εξίσωση

$$\psi_A=\begin{cases} 0 & t\leq 3s \\ 0,04\eta\mu(2\pi t-6\pi) & t\geq 3s \end{cases}$$

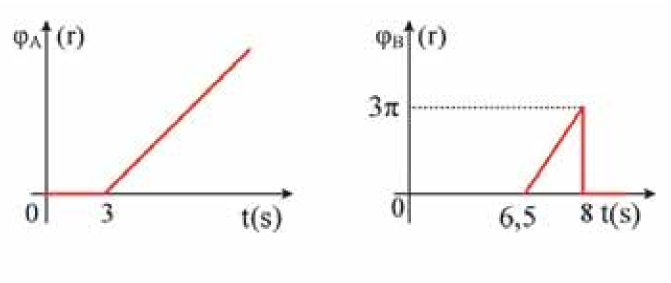
Για να φτάσει το κάθε κύμα στο σημείο Β θα χρειασθεί χρόνο $\Delta t_3=R_1'/u=6,5s$ και $\Delta t_4=R_2'/u=6s$ αλλά επειδή η δεύτερη πηγή ξεκίνησε καθυστερημένα κατά t_1=2s το δεύτερο κύμα θα φτάσει στο σημείο Β την στιγμή t_4=8sec. Η εξίσωση (1) για το σημείο Β μετά την στιγμή t_4 θα μας δώσει αποσβετική συμβολή ενώ από την στιγμή 6,5sec έως 8sec σημείο Β θα ταλαντώνεται εξαιτίας του κύματος που παράγει η πηγή O_1.

$$\psi_B = \begin{cases} 0 & t \le 6{,}5s \\ 0{,}02\eta\mu 2\pi(t-6{,}5) & 6{,}5 \le t \le 8s \\ 0 & t \ge 8s \end{cases}$$

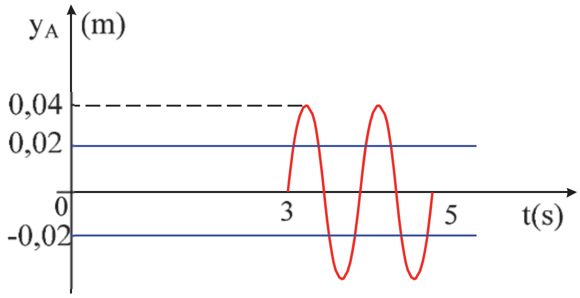
Β. Με βάση τις παραπάνω σχέσεις οι φάσεις των σημείων Α και Β σε συνάρτηση με τον χρόνο θα είναι

$$\Phi_A = \begin{cases} 0 & t \le 3s \\ 2\pi t - 6\pi & t \ge 3s \end{cases}$$

$$\Phi_B = \begin{cases} 0 & t \le 6{,}5s \\ 2\pi(t-6{,}5) & 6{,}5 \le t \le 8s \\ 0 & t \ge 8s \end{cases}$$

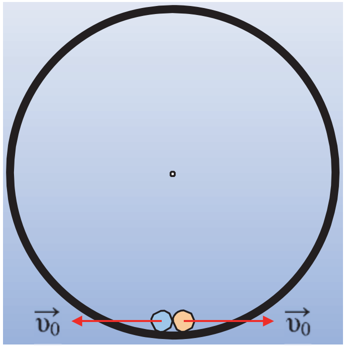


Γ. Η δυναμική ενέργεια δίνεται από την σχέση $U=1/2D\cdot\psi^2$ άρα $\psi=\pm0{,}02m$. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης $\psi_{A\text{-}t}$ η οποία είναι η παρακάτ



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι 8 φορές το σημείο Α βρισκόταν σε απομάκρυνση ±0,02m άρα είχε και 8 φορές δυναμική ενέργεια $U=8\pi^2.10^{-7}J$ μέχρι την χρονική στιγμή t=5sec.

Δυο σφαίρες σε μια στεφάνη.



Στο εσωτερικό και στο χαμηλότερο σημείο μιας κατακόρυφης και ακλόνητης κυκλικής στεφάνης ακτίνας R=10m βρίσκονται δύο μικρές ελαστικές σφαίρες ίδιας ακτίνας r=0,1m. Δίνουμε κατάλληλες αντίθετες οριζόντιες ταχύτητες στις δύο σφαίρες έτσι ώστε οι δύο σφαίρες να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν στο εσωτερικό της στεφάνης και να φτάνουν ταυτόχρονα στο ανώτερο σημείο της στεφάνης εκτελώντας με ταχύτητες που θα μπορούσαν μόλις να εκτελέσουν ανακύκλωση.

Αν οι δύο σφαίρες έχουν μάζες $m_2=3m_1$ και η ακαριαία σύγκρουσή τους είναι κεντρική και ελαστική να υπολογιστούν:

A. Το μέτρο της αρχικής ταχύτητας εκτόξευσης των δύο σφαιρών

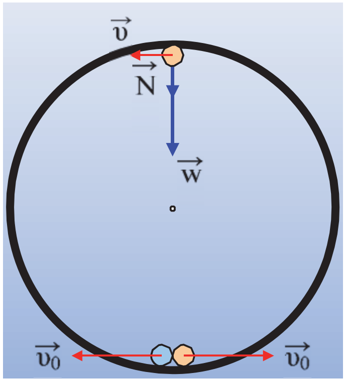
B. Το μέτρο της ταχύτητας των σημείων επαφής των δύο σφαιρών με την κυκλική στεφάνη αμέσως μετά την σύγκρουσή τους.

Γ. Πόσες περιστροφές θα κάνει η σφαίρα μάζας m_2 μέχρι να επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης για πρώτη φορά αν υποθέσουμε ότι η σφαίρα με μάζα m_1 αφαιρεθεί από το σύστημα μετά την κρούση της με την δεύτερη σφαίρα.

Η ροπή αδράνειας της κάθε σφαίρας είναι $I_{cm}=0,4MR^2$, το R>>r, $g=10m/s^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Οταν η κάθε σφαίρα θα φτάσει στο ανώτερο σημείο της στεφάνης το βάρος της και αντίδραση της στεφάνης θα παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης



$\mathrm{Mg} + \mathrm{N} = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$ όμως N>0 άρα $\upsilon_{min} = \sqrt{gR}$ =10m/s

Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από το χαμηλότερο σημείο στο ανώτερο θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_o^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{\min}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{\min}^2 + mg2R$$

και μετά από πράξεις υ=19,6m/s.

B. Η κρούση των δύο σφαιρών είναι κεντρική και ελαστική. Οι δυνάμεις επαφής δεν μπορούν να προκα- λέσουν ροπή έτσι η γωνιακή ταχύτητα των δύο σφαιρών δεν μπορεί να αλλάξει εξαιτίας της κρούσης. Για τις ταχύτητες των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών μπορούμε να πάρουμε του γνωστούς τύπους της ελαστικής κρούσης. Ετσι

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(-\upsilon) = -20m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(-\upsilon) = 0m/s$$

Ετσι τα σημεία επαφής των δύο σφαιρών με τη στεφάνη θα έχουν μέτρα ταχυτήτων

$$\upsilon_{ολ1}=\upsilon_1{'}+\upsilon_{περ}=30m/s$$

$$\upsilon_{ολ2}=\upsilon_{περ}=10m/s$$

Γ. Μέχρι να γίνει η κρούση η σφαίρα μάζας m_2 έχει διαγράψει κυλιόμενη μήκος πR άρα έχει κάνει $N_1=πR/2πr=50$ περιστροφές.

Μετά την κρούση το κέντρο μάζας της σφαίρας m_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση. Ετσι από το νόμο της ελεύθερη πτώσης θα έχουμε

$$2R=1/2gt^2 \text{ άρα } t=2s$$

Η σφαίρα όμως συνεχίζει να εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με

$$ω=U/r=100r/s.$$

Ετσι κατά την πτώση της θα διαγράψει γωνία

$$θ=ωt=200r \text{ άρα}$$

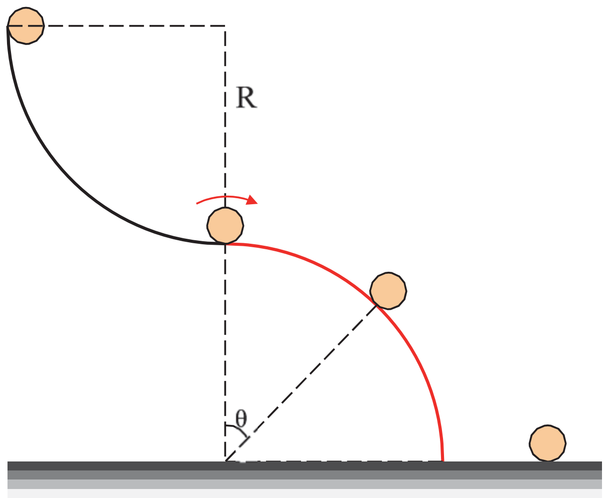
$$N_2=θ/2π=100/π \text{ περιστροφές.}$$

Μέχρι να επιστρέψει στο σημείο βολής για πρώτη φορά θα έχει διαγράψει

$$N_{ολ}=\{100/π+50\} \text{ περιστροφές.}$$

Δύο τεταρτοκύκλια

Τα δύο κατακόρυφα τεταρτοκύκλια του σχήματος έχουν τη ίδια ακτίνα R. Σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται να κυλίσει χωρίς να ολισθαίνει από το ανώτερο σημείο του και στο εσωτερικό του πρώτου τεταρτοκύκλιου και στην συνέχεια μπαίνει στο εξωτερικό μέρος του δεύτερου τεταρτοκύκλιου χωρίς απώλειες ενέργειας όπου και εκεί συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.



Να βρεθούν:

A. Το συνθ εκείνης της γωνία θ όπου η μικρή σφαίρα χάνει την επαφής με την εξωτερική επιφάνεια του δεύτερου τεταρτοκύκλιου σε σχέση με τις δύο ακτίνες R και r. Ποια θα έπρεπε να είναι η σχέση των δύο ακτίνων R και r ώστε η σφαίρα να μην κυλίσει καθόλου στην εξωτερική επιφάνεια του δεύτερου τεταρτοκύκλιου.

B. Ποια η τελική κινητική ενέργεια της σφαίρας λόγω της μεταφορικής κίνησης όταν φτάσει στο έδαφος.

Για την σφαίρα $I_{cm}=2/5.m.r^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για τη κίνηση της σφαίρας στο πρώτο τεταρτοκύκλιο θα έχουμε

$$m.g.(R\text{-}r)=1/2.m.U^2 +1/2.2/5.m.r^2.\omega^2 \quad \text{άρα } U=\sqrt{g(R\text{-}r)/0,7} \quad (1)$$

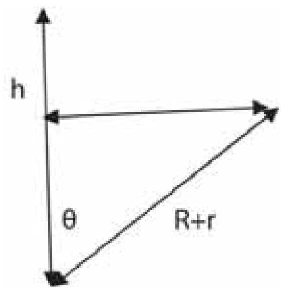
Για την κίνηση της σφαίρα στο εξωτερικό του δεύτερου τεταρτοκύκλιου θα βρούμε με την βοήθεια της ΑΔΕ

$$1/2.m.U^2 +1/2.2/5.m.r^2.\omega^2 + m.g.h =1/2.m.U_{\tau\varepsilon\lambda}^2 +1/2.2/5.m.r^2.\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 \quad (2)$$

Την στιγμή που η σφαίρα θα χάσει την επαφή της με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο η μοναδική δύναμη που θα ασκείτε στη σφαίρα θα είναι το βάρος της και μία συνιστώσα του βάρους θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης με τη βοήθεια της οποίας θα βρούμε

$$m\ g\ \sigma\upsilon\nu\theta=m.U_{\tau\varepsilon\lambda}^2/(R+r) \quad (3)$$

από το ορθογώνιο τρίγωνο



$$h=(r+R)(1\text{-}\sigma\upsilon\nu\theta) \quad (4)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (4) (3) και (1) στην (2) θα βρούμε μετά από πράξεις

$$\sigma\upsilon\nu\theta=2R/1,7(R+r) \quad (5)$$

Για να μην κυλίσει καθόλου η σφαίρα στη εξωτερική επιφάνεια του δεύτερου τεταρτοκύκλιου θα έπρεπε το θ=0rad άρα από την εξίσωση (5) r=3R/17

Β. Η σφαίρα μετά το χάσιμο της επαφής της με το δεύτερο τεταρτοκύκλιο θα κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους της. Ετσι η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής δεν θα αλλάξει. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση μέχρι να φτάσει στο έδαφος θα έχουμε

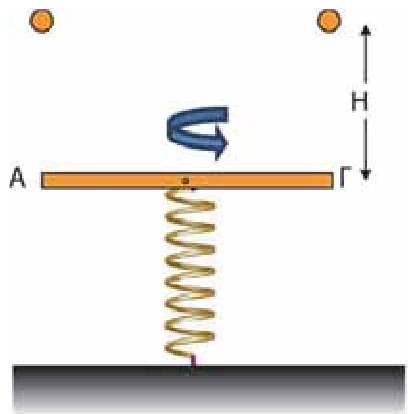
$$m.g.(2R\text{-}r)=K_{τελ}+1/2.2/5.m.r^{2}.ω_{τελ}^{2}$$

με τη βοήθεια των σχέσεων (3) και (5) μετά από πράξεις θα φτάσουμε

$$K_{τελ}=m.g.(30R/17–r)$$

Ελικόπτερο και στόκοι

Μία λεπτότατη και άκαμπτη οριζόντια ράβδος ΑΓ μάζας M=4Kg και μήκους L=1m είναι αρχικά ακίνητη πάνω από ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K=4\pi^2$N/m με το κέντρο μάζας της ράβδου να βρίσκεται σε επαφή με το πάνω άκρο του ελατηρίου που έχει το φυσικό του μήκος και που το άλλο του άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα



Με κατάλληλη στιγμιαία ροπή ζεύγους την χρονική στιγμή t=0 δίνουμε αρχική κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=2\pi$ r/s στη ράβδο και ταυτόχρονα την αφήνουμε ελεύθερη να εκτελέσει ταλάντωση. Την χρονική στιγμή t=0 στην ίδια κατακόρυφη με το Α και το Γ αφήνουμε δύο σημειακές μάζες m=2π/15 Kg από ύψος H. Αν οι δύο στόκοι βρεθούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τα άκρα Α και Γ της ράβδου την χρονική στιγμή που η ράβδος περνάει από την Θέση ισορροπίας της για δεύτερη φορά μετά την χρονική στιγμή t=0 να βρεθούν:

A. Αν θα πραγματοποιηθεί πλαστική κρούση της ράβδου με τους δύο στόκους.

Β. Το ύψος Η από όπου αφέθηκαν ελεύθεροι οι στόκοι

Γ. Το τελικό πλάτος ταλάντωσης του συστήματος ράβδου-στόκων. Θα χαθεί η επαφή του συστήματος ράβδου-στόκων με το ελατήριο;

Δ. Η τελική γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδου-στόκων.

Δίνεται για τη ράβδο $I_{cm}=1/12\ ML^2$, $g=10m/s^2$, $\pi^2=10$,

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η ράβδος την χρονική στιγμή t=0 δεν έχει κατακόρυφη ταχύτητα άρα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσή της. Το πλάτος της ταλάντωσής που θα εκτελέσει το κέντρο μάζας της ράβδου θα δίνεται από την σχέση της ισορροπίας

$$Kx_1=Mg \text{ άρα } x_1=1m \text{ και άρα το } A=1m.$$

Για να φτάσει η ράβδος για δεύτερη φορά στην θέση ισορροπίας της θα χρειασθεί χρόνος $t=3T/4=1,5s$.

Στον ίδιο χρόνο οι στόκοι θα πέσουν κατά ύψος $H_1=\frac{1}{2}gt^2=11,25m$. Για να συμβεί όμως κρούση θα πρέπει τα σημεία Α και Γ της ράβδου να βρεθούν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με το αρχικό τους επίπεδο. Αυτό θα συμβεί μόνο η ράβδος έχει εκτελέσει ακέραιο αριθμό μισών περιστροφών δηλαδή όταν $\theta=\kappa\pi$ (1) όπου ο κ να ανήκει στους ακέραιους αριθμούς. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι σταθερή μιας και η δύναμη του βάρους και του ελατηρίου ασκούνται στο κέντρο μάζας της ράβδου και δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή. Ετσι η γωνία $\theta=\omega_0 t$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα έχουμε $2\pi \cdot 1{,}5 = \kappa\pi$ άρα $\kappa=3$.

Αρα οι στόκοι θα κολλήσουν στα άκρα της ράβδου.

Β. Οι στόκοι για να φτάσουν να συγκρουστούν με τη ράβδο θα έχουν διανύσει κατακόρυφο διάστημα $H_1=11{,}25m$ από τη Θ.Ι. της ράβδου άρα θα πρέπει να αφεθούν από ύψος

$$H=H_1-A=10{,}25m.$$

Γ. Η ράβδος την στιγμή της κρούσης έχει μεταφορική ταχύτητα

$$\upsilon_{cm}=\omega A=\pi \ m/s.$$

Οι στόκοι έχουν κατακόρυφη ταχύτητα $\upsilon=gt=15m/s$.

Με την βοήθεια της ΑΔΟ για την πλαστική κρούση θα έχουμε:

$$M\upsilon_{cm}-m\upsilon-m\upsilon=(M+2m)\upsilon_{\sigma\upsilon\sigma} \text{ άρα } \upsilon_{\sigma\upsilon\sigma}=0 \ m/s.$$

Η αύξηση της μάζας του συστήματος θα αλλάξει και τη θέση ισορροπίας της κατακόρυφης ταλάντωσης του συστήματος. Με τη βοήθεια της τελικής ισορροπίας θα έχουμε $M_{o\lambda}g=Kx_2$ άρα $x_2=(1+\pi/15)$ m. Ετσι το νέο πλάτος θα είναι $A_2=x_2-x_1=\pi/15$ m.

Για να χαθεί η επαφή του συστήματος με το ελατήριο θα πρέπει το σύστημα να φτάσει στην θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί μιας και το πλάτος ταλάντωσης είναι μικρότερο από την συσπείρωση x_2 του ελατηρίου από την νέα θέση ισορροπίας.

Δ. Για την πλαστική κρούση των στόκων έχουμε με την βοήθεια της ΑΔΣ: $I_{cm}\omega_0=I_{o\lambda}\omega_{\sigma\upsilon\sigma\tau}$

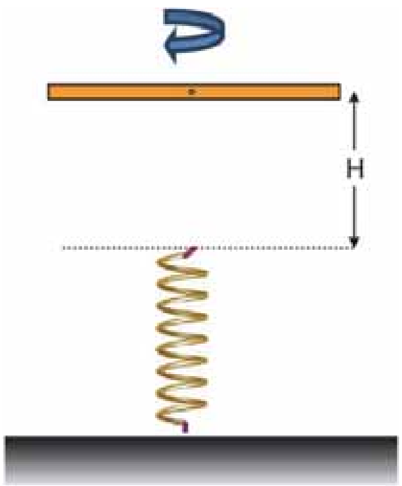
άρα $\frac{1}{12}ML^2\omega_0 = \left(\frac{1}{12}ML^2 + 2m\frac{L^2}{4}\right)\omega_{\sigma\upsilon\sigma\tau}$

άρα μετά από πράξεις:

$$\omega_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{10\pi}{5+\pi} r/s$$

Ελικόπτερο - Φυλακές επειδή είναι και τα δύο της μόδας

Μία οριζόντια ράβδος μάζας M=4Kg και μήκους L=1m είναι αρχικά ακίνητη πάνω από ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K=40\pi^2 N/m$ με το κέντρο μάζας της ράβδου να απέχει κατακόρυφη απόσταση H=0,15m από το πάνω άκρο του ελατηρίου που το άλλο του άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα



Με κατάλληλη στιγμιαία ροπή ζεύγους δίνουμε αρχική κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα ω_0= 6 r/s στη ράβδο και ταυτόχρονα την αφήνουμε ελεύθερη. Αν η ράβδος με την κρούσης με το ελατήριο δεν έχει απώλεια ενέργειας και δεν κολλάει σε αυτό να βρεθούν:

A. Το είδος της κίνησης της ράβδου
B. Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου
Γ. Η περίοδος της περιοδικής κίνησης του κέντρου μάζας της ράβδου.

$I_{cm}=1/2ML^2$, $\pi^2=10$ και $\sqrt{3}=1,73$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η δύναμη που δέχεται η ράβδος είναι το βάρος της και όταν είναι σε επαφή με το ελατήριο η δύναμη του ελατηρίου. Και οι δύο δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας της ράβδου με αποτέλεσμα να μην μπορούν να μεταβάλλουν την στροφική κατάσταση της ράβδου. Ετσι η αρχική γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι συνεχώς σταθερή.

Η ράβδος εκτελεί συνεχώς ομαλή στροφική κίνηση και κατά την πτώση της μέχρι να ακουμπήσει το ελατήριο εκτελεί και ελεύθερη πτώση. Μετά την επαφή με το ελατήριο εκτελεί μέρος κατακόρυφης Α.Α.Τ. μέχρι να επιστρέψει στο φυσικό μήκος του ελατηρίου οπότε από εκεί και μετά εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση το g.

Β. Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου θα είναι στην θέση ισορροπίας της ΑΑΤ και θα είναι:

$$K_{max}= ½\, I\omega_0^2 + ½\, KA^2 \quad (1)$$

Για τη θέση ισορροπίας θα έχουμε $Kx_1=Mg$ άρα $x_1=0{,}1$m

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την ελεύθερη πτώση της ράβδου

$$MgH= ½\, M\upsilon^2 \quad \text{θα βρούμε } \upsilon=\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για την κατακόρυφη ταλάντωση του κέντρου μάζας της ράβδου θα έχουμε:

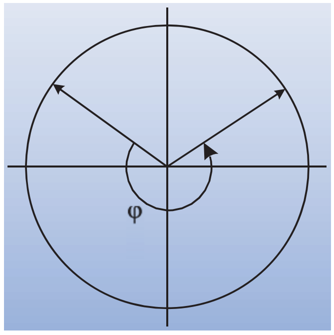
$\frac{1}{2} Kx_1^2 + \frac{1}{2} M\upsilon^2 = \frac{1}{2} KA^2$ θα βρούμε A=0,2m

Μετά την αντικατάσταση των παραπάνω αποτελεσμάτων στην σχέση (1) θα έχουμε $K_{max}=9J$

Γ. Για να επιστρέψει το σώμα στην αρχική θέση θα πρέπει να κάνει τους εξής χρόνους

$H = \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad t_1 = 0{,}1\sqrt{3}$ s για την κάθοδο

Για την ταλάντωση και με την βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος



$\varphi = \omega\Delta t \rightarrow 4\pi/3 = 10\Delta t_2$

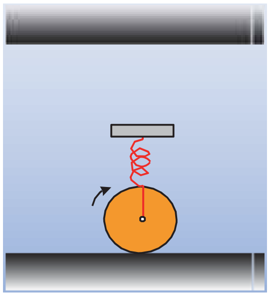
άρα $\Delta t_2 = 2\pi/15$ s

Ο χρόνος ανόδου της ράβδου θα είναι και πάλι $t_1 = 0{,}1\sqrt{3}$ s

Αρα ο συνολικός χρόνος $t_{ολ}=0{,}764s$

Ένα αμορτισέρ.

Δίσκος μάζας M=1Kg ακτίνας R=0,1m ισορροπεί κατακόρυφος πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο κέντρο του δίσκου στερεώνουμε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς K=100N/m και φυσικού μήκους l_o=0,8m. Στο πάνω μέρος του ελατηρίου ισορροπεί σημειακό σώμα μάζας m_1=1Kg. Εκτοξεύουμε το σημειακό σώμα με κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου u=4m/s και φορά προς τα πάνω και την ίδια στιγμή με μία στιγμιαία δεξιόστροφη ροπή δίνουμε γωνιακή ταχύτητα ω=15r/s η οποία είναι παράλληλη προς το έδαφος στον δίσκο.



Την στιγμή που ο δίσκος είναι έτοιμος να απογειωθεί από το έδαφος το σημειακό σώμα συγκρούεται ακαριαία κεντρικά και ελαστικά με ελαστικό νταβάνι. Να βρεθούν:

A. Τι είδους κίνηση εκτελεί ο δίσκος;
B. Η απόσταση του δαπέδου από το νταβάνι
Γ. Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για το σημειακό σώμα.
Δ. Πόσες περιστροφές εκτελεί ο δίσκος ανάμεσα σε δύο κρούσεις του σημειακού σώματος με το νταβάνι.
E. Αν κάποια στιγμή βάλουμε στο πάνω μέρος του σημειακού

σώματος μία σταγόνα LOGO κόλλα και η κρούση του σημειακού σώματος γίνει πλαστική με το νταβάνι ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια του δίσκου.

Δίνεται: $I_Δ=0{,}5MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

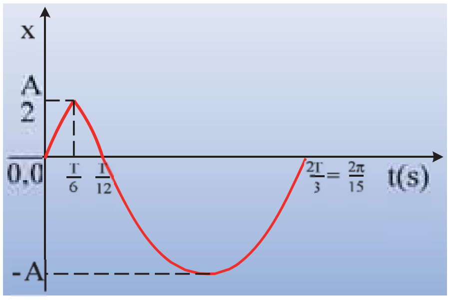
Α. Επειδή το επίπεδο είναι λείο ο δίσκος δεν δέχεται δύναμη τριβής από το δάπεδο. Οι μοναδικές δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο είναι το βάρος του, η κάθετη δύναμη του δαπέδου αλλά και η δύναμη του ελατηρίου. Όλες αυτές οι δυνάμεις δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή έτσι ο δίσκος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.

Β. Για να είναι έτοιμος ο δίσκος να απογειωθεί θα πρέπει η δύναμη του δαπέδου να γίνει N=0. Το ελατήριο πρέπει να είναι τεντωμένο και να ισχύει $F_{ελ}=Mg$ άρα $x_2=0{,}1$m. Η απόσταση του νταβανιού από το πάτωμα θα είναι $H=l_o+R+x_2=1$m.

Γ. Το σημειακό σώμα εκτελεί ταλάντωση και μέχρι να γίνει η κρούση είναι απλή αρμονική.

Για την ισορροπία του σημειακού σώματος $Kx_1=m_1g$ άρα $x_1=0{,}1$m. Η ταχύτητα εκτόξευσης είναι και η μέγιστη ταλάντωσης και αν το σύστημα έκανε ΓΑΤ θα είχε πλάτος $A=u/ω=0{,}4$m.

Παρατηρούμε ότι η θέση της ελαστικής κρούσης με το νταβάνι είναι η $x=+A/2$ άρα ο χρόνος από την ΘΙΤ και μέχρι την στιγμή της ελαστικής κρούσης θα βρεθεί από την εξίσωση της απομάκρυνσης $A/2=Aημωt$ ή $t=T/12=π/60$ s. Το μέτρο της ταχύτητας δεν θα αλλάξει εξαιτίας της ελαστικής κρούσης έτσι η ταλάντωση θα συνεχιστεί και κατά την κάθοδο του σημειακού σώματος. Ο χρόνος μέχρι να φτάσει και πάλι στην ΘΙΤ θα είναι και πάλι T/12 ενώ μέχρι να φτάσει στην θέση ελάχιστης απομάκρυνσης θα χρειαστούμε χρόνο T/4. Ετσι η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης με το χρόνο θα έχει την παρακάτω μορφή



Δ. Ο χρόνος επανάληψης των κρούσεων είναι η περίοδος της παραπάνω περιοδικής κίνησης και είναι $T_{ταλ}$=2T/3=2π/15s.

Ο δίσκος στον παραπάνω χρόνο εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση άρα η γωνία διαγραφής του δίσκου θα είναι

θ=ωt=15·2π/15=2π rad.

Αρα οι περιστροφές θα είναι N=θ/2π=1 περιστροφή.

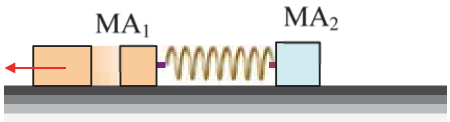
Ε. Όταν θα κολλήσει η σημειακή μάζα το ελατήριο είναι τεντωμένο κατά x_2=0,1m. Η θέση αυτή όμως είναι και η κατακόρυφη θέση ισορροπίας για τον δίσκο .

Έτσι ο δίσκος θα εκτελεί μόνο στροφική κίνηση με

$$K_{περ} = \frac{1}{2} I\omega^2 = 0{,}5625J$$

Ένα μηχανικό σύστημα μετά από έκρηξη.

Σώμα μάζας M_{A1}=6Kg είναι δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς K=100N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σε δεύτερο σώμα μάζας M_{A2}=2Kg. Το όλο σύστημα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο μεγάλου μήκους. Ξαφνικά και εξαιτίας μιας έκρηξης το σώμα M_{A1} σπάει σε δύο κομμάτια που το ένα έχει διπλάσια μάζα από το άλλο. Από αυτά το μικρότερο κομμάτι μένει δεμένο στο ελατήριο και κινείται οριζόντια έτσι ώστε να αρχίζει να συσπειρώνει το ελατήριο. Αν η ενέργεια της έκρηξης που μεταφέρθηκε στα κομμάτια του M_{A1} ήταν 6 J να βρεθούν:



A. Τα μέτρα των ταχυτήτων των κομματιών του M_{A1} μετά την έκρηξη
B. Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου
Γ. Τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων όταν το ελατήριο αποκτήσει για πρώτη φορά μετά την έκρηξη το φυσικό του μήκος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Για την έκρηξη και με την βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε:

$$0=m_1 \cdot υ_1 - m_2 \cdot υ_2 \ (1)$$

Το άθροισμα των δύο μαζών θα είναι $m_1+m_2=6$ (2) και $m_1=2m_2$ και με την βοήθεια της ΑΔΕ για την έκρηξη θα έχουμε

$$E_{εκρ}=1/2m_1.U_1^2+1/2m_2.U_2^2$$

Ετσι θα βρούμε m_1=4Kg m_2=2Kg και $υ_1$=1m/sec και $υ_2$=2m/sec.

Β. Το σώμα m_2 μένει δεμένο στο ελατήριο και έχει αρχική ταχύτητα $υ_2$=2m/sec. Ετσι το ελατήριο θα αρχίζει να συσπειρώνεται και το σώμα m_2 να εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση. Η άλλη όμως άκρη του ελατηρίου βρίσκεται στο σώμα M_{A2}. Ετσι το σώμα αυτό αρχίζει να επιταχύνεται. Η ελάχιστη απόσταση των δύο σωμάτων θα συμβεί όταν τα σώματα αποκτήσουν την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Τότε όμως η συσπείρωση του ελατηρίου θα είναι μέγιστη. Με την βοήθεια της ΑΔΟ θα έχουμε για το σύστημα $m_2υ_2=(M_{A2}+m_2)υ$ κοινή άρα $υ_{κοινή}$=1m/sec.

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σύστημα θα έχουμε

$K_2=K_{συ}+U_{ελmax}$ άρα x_{max}=0,2m.

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε και με έναν άλλον τρόπο Από την ΑΔΟ για μία τυχαία θέση του συστήματος

$m_2.U_2=m_2.U_3+M_{A2}.U_4$ άρα $4=2U_3+2U_4$ (S.I) (3) και από την ΑΔΕ

$K_2=K_3+K_4+U_{ελ}$ άρα $4=U_3^2+U_4^2+50x^2$ (S.I.) (4)

με αντικατάσταση της (3) στην (4) θα προκύψει η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς U_3:

$$U_3^2-2U_3+25x^2=0\ .$$

Το U_3 δεν μπορεί να πάρει φανταστικές τιμές άρα η διακρίνουσα της δευτοροβάθμιας εξίσωσης θα πρέπει να είναι θετική.

Αρα Δ≥0 άρα $4-100x^2\geq0$ άρα $x\leq0{,}2$ άρα x_{max}=0,2m.

Γ. Αν εφορμόσουμε ΑΔΟ και ΑΔΕ για το σύστημα αμέσως μετά την έκρηξη και μέχρι την στιγμή που το ελατήριο θα αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος θα πάρουμε

$$m_2 \cdot U_2 = m_2 \cdot U_5 + M_{A2} \cdot U_6 \quad (5)$$

$$K_2 = K_5 + K_6 \quad \text{άρα}$$

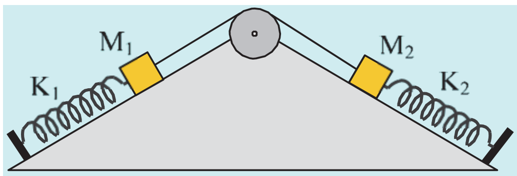
$$1/2\ m_2.U_2^2 = 1/2\ m_2.U_5^2 + 1/2 M_{A2}.U_6^2$$

βλέπουμε ότι οι σχέσεις ισοδυναμούν με τις σχέσεις που θα έδινε μία ελαστική κρούση κινούμενου με ακίνητου σώματος. Επειδή λοιπόν και επειδή οι μάζες m_2 και M_{A2} είναι ίσες θα ανταλλάξουν ταχύτητες την στιγμή που το ελατήριο θα αποκτήσει για πρώτη φορά το φυσικό του μήκος.

Αρα U_5=0 m/sec και U_6=2m/sec.

Ένα σύστημα που εκτελεί γ.α.τ.

Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από ένα ακλόνητο ισοσκελές λείο τρίγωνο που οι γωνίες στην βάση του είναι 30^o και στην κορυφή αυτού έχουμε στερεώσει μία τροχαλία μάζας M=4Kg που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα. Τα σώματα έχουν μάζες $M_1=M_2=4Kg$ και ισορροπούν με τα ελατήρια να έχουν μεγαλύτερο μήκος από το φυσικό τους μήκος με την βοήθεια μη εκτατού νήματος που συνδέεται με τα σώματα μέσω της τροχαλίας. Τα ελατήρια έχουν σταθερές $K_1=400N/m$ και $K_2=100N/m$.



Αρχικά το ελατήριο με σταθερά K_1 είναι επιμηκυμένο κατά $x_1=0,1m$ σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Απομακρύνουμε λίγο το σύστημα από την θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο.

Α. Να βρεθεί η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου με σταθερά K_2

Β. Να αποδείξετε ότι το κάθε σώμα θα εκτελέσει α.α.τ. και να υπολογιστεί η περίοδος του συστήματος.

Γ. Να βρεθεί η συνθήκη έτσι ώστε το σύστημα να εκτελεί α.α.τ.

Για την τροχαλία $I_{cm}=½\,MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την ισορροπία του σώματος με μάζα M_1 θα ισχύει

$$T_1=M_1g\eta\mu\varphi+K_1x_1 \text{ άρα } T_1=60N$$

Για την ισορροπία της τροχαλίας θα ισχύει $T_1R-T_2R=0$ άρα $T_2=60N$
Για την ισορροπία του σώματος M_2 θα ισχύει

$$T_2=M_2g\eta\mu\varphi+K_2x_2 \text{ άρα } x_2=0{,}4m$$

Β. Εστω ότι πιέζουμε λίγο προς τα κάτω το σώμα μάζας M_2 τότε για τις μεταφορικές κινήσεις των δύο σωμάτων αλλά και την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας θα ισχύουν οι νόμοι της κίνησης τους

$$M_1g\eta\mu\varphi+K_1(x_1+x)-T_1=M_1a \quad (1)$$
$$T_2-M_2g\eta\mu\varphi-K_2(x_2-x)=M_2a \quad (2)$$
$$T_1R-T_2R=0{,}5M\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_1-T_2=0{,}5Ma \quad (3)$$

Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων θα καταλήξουμε:

$$T_1=60+200x \text{ (SI) και } T_2=60+100x \text{ (SI)}, \qquad a=50x \text{ (SI)}$$

Για τις ταλαντώσεις των δύο σωμάτων και θεωρώντας θετική φορά την φορά της αρχικής απομάκρυνσης θα έχουμε

$\Sigma F=T_1-M_1g\eta\mu\varphi-K_1(x_1+x)=-200x$ (SI) άρα α.α.τ. με $D_1=200N/m$
$\Sigma F=K_2(x_2-x)+M_2g\eta\mu\varphi-T_2=-200x$ (SI) άρα α.α.τ με $D_2=200N/m$

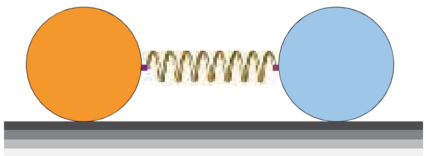
$$\text{Αρα } T=2\pi\sqrt{\frac{M}{D}}=\frac{2\pi}{\sqrt{50}}s\,.$$

Γ. Να να συνεχίσει το σύστημα να εκτελεί ταλάντωση θα πρέπει οι δύο τάσεις του νήματος να υπάρχουν άρα $T_1>0$ και $T_2>0$ άρα το πλάτος ταλάντωσης θα πρέπει να είναι μικρότερο από

$$A=\frac{60}{100}m = 0{,}6m\ .$$

Ένας κύλινδρος με μια σφαίρα.

Στο παρακάτω σχήμα ο κύλινδρος έχει μάζα m_1=14Kg και ακτίνα R ενώ η σφαίρα έχει μάζα m_2=15Kg και ακτίνα επίσης R. Το σύστημα των δύο στερεών ισορροπεί σε οριζόντιο έδαφος με τη βοήθεια ιδανικού οριζόντιου ελατήριου και οριζόντιου νήματος. Το ελατήριο έχει σταθερά K=4200N/m είναι συσπειρωμένο κατά x=0,4m και δεν είναι δεμένο σε κάποιο από τα δύο στερεά. Το κέντρα των δύο στερεών και το ελατήριο βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

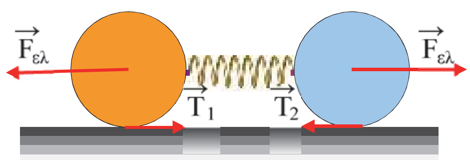


Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και τα δύο σώματα αρχίζουν να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Να βρεθούν:

A. Οι τελικές ταχύτητες των κέντρων μάζας των στερεών σωμάτων.
B. B) Τι ποσοστό της αρχικής ενέργειας του ελατηρίου πήρε τελικά το κάθε στερεό σώμα; Για την σφαίρα $I_{cm}=0{,}4MR^2$ και για τον κύλινδρο $I_{cm}=0{,}5.M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

A.



Εφαρμόζοντας τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και στροφική κίνηση του κάθε στερεού θα έχουμε

Για τον κύλινδρο $K.x\text{-}T_1=M_1.a_1$ (1) $T_1.R=0{,}5.M_1.R.\alpha_{γων1}$

άρα $T_1=0{,}5.M_1.a_1$ (2)

Από (1) και (2) $K.x=M_1.a_1+0{,}5.M_1.a_1$ και με αντικατάσταση

$100x=21.a_1$ (3) (S.I.)

Για την σφαίρα $K.x\text{-}T_2=M_2.a_2$ (4) $T_2.R=0{,}4.M_2.R.\alpha_{γων2}$

άρα $T_2=0{,}4.M_2.a_2$ (5)

Από (4) και (5) $K.x=M_2.a_2+0{,}4.M_2.a_2$

και με αντικατάσταση $100x=21.a_2$ (6) (S.I.)

Από τις εξισώσεις (5) και (6) παρατηρώ ότι οι επιταχύνσεις των κέντρων μάζας των δύο στερεών είναι συνεχώς ίσες κατά μέτρο. Αρα τα δύο κέντρα μάζας των στερεών θα έχουν συνεχώς την ίδια ταχύτητα. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σύστημα των δύο στερεών θα έχουμε

$$U_{ελ}=K_{μετκυλ}+K_{περκυλ}+K_{μετσφαιρ}+K_{περσφαιρ}$$

$$1/2Kx^2=1/2M_1.U^2+1/2\,I_1.\omega_1^2+1/2M_2U^2+1/2.I_2.\omega_2^2$$

μετά τις πράξεις U=4m/sec.

B. Η κινητική ενέργεια της σφαίρα θα είναι:

$$K_{σφ}=1/2M_2.U^2+1/2.I_2.\omega_2^2=168J$$

Ενώ η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου θα είναι:

$$K_{κυλ}=1/2M_1.U^2+1/2.I_1.\omega_1^2=168J$$

Αρα το κάθε στερεό πήρε το 50% της αρχικής ενέργειας του ελατηρίου.

Ένας κύλινδρος και μια σφαίρα μαζί.

Κύλινδρος μάζας M_1=2kg είναι δεμένος με σκοινί με σφαίρα μάζας M_2=5kg ίδιας ακτίνας με τον κύλινδρο. Το σχοινί είναι με τέτοιο τρόπο περασμένο στο κέντρο της σφαίρας και του κυλίνδρου ώστε και η σφαίρα και ο κύλινδρος να μπορούν να περιστρέφονται γύρω από το κέντρο τους και το σχοινί να είναι συνεχώς οριζόντιο και τεντωμένο. Στο κέντρο της σφαίρας έχουμε στερεώσει σημειακή ηχητική πηγή που μπορεί να παράγει ήχο συχνότητας Fs=660Hz ενώ στο κέντρο του κυλίνδρου έχουμε στερεώσει σημειακό ανιχνευτή ήχων. Το σύστημα ισορροπεί σε οριζόντιο δάπεδο με το σχοινί να είναι τεντωμένο. Την χρονική στιγμή t=0 εφαρμόζουμε οριζόντια σταθερή δύναμη F=10N στο κέντρο του κυλίνδρου με αποτέλεσμα και ο κύλινδρος αλλά και σφαίρα να αρχίζουν να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Την στιγμή t=10sec το πειραχτήρι ο μικρός Θανάσης (που γιορτάζει σήμερα) βάζει φωτιά στο σκοινί με αποτέλεσμα αυτό να κοπεί ακαριαία. Η δύναμη F συνεχίζει να ασκείται στον κύλινδρο και μετά το κόψιμο του σχοινιού και ο κύλινδρος συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Α. Να βρεθεί η επιτάχυνση του συστήματος πριν το κόψιμο και μετά το κόψιμο του σχοινιού.

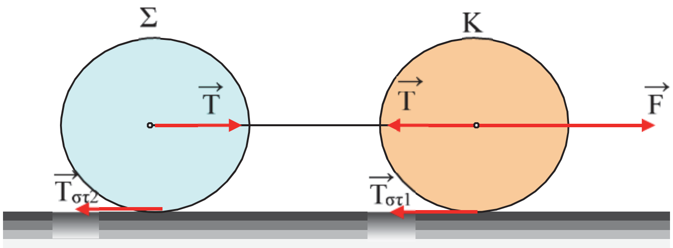
Β. Να γίνει η γραφική παράσταση της συχνότητας που ανιχνεύει ο ανιχνευτής ήχων σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Γ. Να βρεθεί το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μεταφέρθηκε στην σφαίρα μέχρι την στιγμή που κάηκε το νήμα.

Για την σφαίρα Icm=$0,4MR^2$ και για τον κύλινδρο Icm=$0,5MR^2$.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου Uηχ=340m/s.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



A. Από τους νόμους Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου και της σφαίρας θα έχουμε

Για κύλινδρο:

$$F-T-T_{στ1}=M_1.α \quad (1)$$

και $T_{στ1}.R=0,5M_1R^2\cdot α_{γων}$ άρα $T_{στ1}=0,5M_1.α$ (2)

και από την (1) και (2)

$$F-T=1,5M_1.α \quad (3)$$

Για την σφαίρα:

$$T-T_{στ2}=M_2.α \quad (4)$$

και $T_{στ2}.R=0,4M_2R^2\cdot α_{γων}$ άρα $T_{στ2}=0,4M_2.α$ (5)

από (4) και (5)

$$T=1,4M_2.α \ (6)$$

Αν αντικαταστήσουμε την (6) στην (3) θα πάρουμε α=1m/sec^2.

Μετά το κόψιμο του νήματος από τους νόμους Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου θα έχουμε

$F\text{-}T_{στ1}{}' = M_1.α_2$

$$\text{και } T_{στ1}{}'.R = 0{,}5M_1R^2 \cdot α_{γων}{}'$$

$$\text{άρα } F - 0{,}5M_1.α_2 = M_1.α_2$$

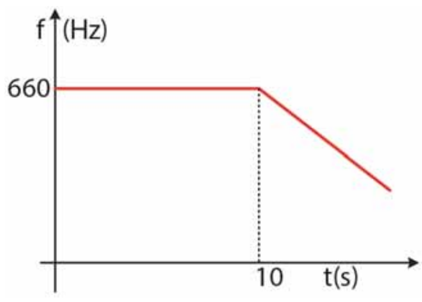
$$\text{άρα } α_2 = 10/3 \text{ m/sec}^2.$$

Η σφαίρα δεν δέχεται πια την τάση του νήματος έτσι θα εκτελεί ομαλή μεταφορική και στροφική κίνηση.

Β. Για όσο χρόνο τα σώματα ήταν δεμένα με το σχοινί είχαν και κοινές ταχύτητες .Η μεταξύ τους απόσταση ήταν σταθερή άρα η συχνότητα που κατέγραφε ο ανιχνευτής ήταν αυτή της πηγής. Μετά το κόψιμο του σχοινιού η πηγή κινείται με σταθερή ταχύτητα $U_{πηγής} = α.t = 10\text{m/sec}$ ενώ ο ανιχνευτής κινείται με ταχύτητα $U_{αν} = 10 + 10.t'/3$ (S.I.) όπου t΄ ο χρόνος μετά το κόψιμο του σχοινιού. Με βάση τον τύπο για το φαινόμενο Doppler θα έχουμε την συνάρτηση

$$F_{παρ} = (340 - 10 - 10t'/3)660/(340-10) = 660 - 20t'/3 \text{ (S.I.)}$$

Αρα η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή



Γ. Το έργο τη δύναμης μέχρι το κόψιμο του νήματος θα δίνεται από την σχέση:

$$WF=F\cdot X=10.0,5.1.10^2=500J$$

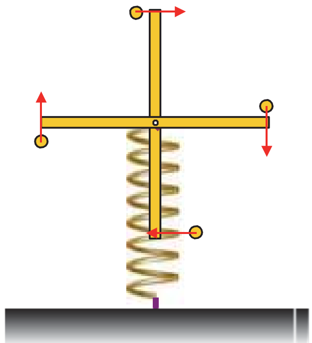
Η κινητική ενέργεια της σφαίρας θα είναι:

$$K_{ολ}=1/2MU_{cm}^2 + 1/2I.\omega^2=350J$$

άρα το Π=350.100%/500=70%

Επειδή υπάρχει περίσσευμα στόκων και φουρφουριών....

Δύο ράβδοι μάζας $M=1,8Kg$ και μήκους $L=1m$ είναι κολλημένοι στο κέντρο μάζας τους έτσι ώστε να σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία. Κάνουμε μία μικρή τρύπα στο κέντρο μάζας των δύο ράβδων και στο κέντρο τους περνάμε οριζόντιο άξονα που είναι η κατάληξη ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K=400N/m$ και αρκετά μεγάλου φυσικού μήκους όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το σύστημα ισορροπεί με την μία ράβδο κατακόρυφη και την άλλη οριζόντια και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον οριζόντιο άξονα.



Τέσσερα όμοια σημειακά σώματα $m=0,1Kg$ που κινούνται τα δύο οριζόντια και τα δύο κατακόρυφα με το ίδιο μέτρο ταχύτητας $υ=10m/s$ συγκρούονται ταυτόχρονα και ακαριαία στα τέσσερα άκρα των δύο ράβδων όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Α. Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει το κέντρο μάζας του συστήματος των σωμάτων;

Β. Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος ;

Γ. Ποιο το ελάχιστο και ποιο το μέγιστο μέτρο της γραμμικής ταχύτητας που θα μπορούσαν να αποκτήσουν κάποια στιγμή οι σημειακές μάζες;

Για την κάθε ράβδο $I_{cm}=1/12ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με την βοήθεια της ΑΔΟ για τους άξονες χχ΄και ψψ΄θα έχουμε

$m\upsilon - m\upsilon = (2m+2M)\upsilon_{\sigma\upsilon\sigma\chi\chi}'$ θα έχουμε $\upsilon_{\sigma\upsilon\sigma\chi\chi}'=0m/s$

$m\upsilon - m\upsilon = (2m+2M)\upsilon_{\sigma\upsilon\sigma\psi\psi}'$θα έχουμε $\upsilon_{\sigma\upsilon\sigma\psi\psi}'=0m/s$

άρα το κέντρο μάζας του συστήματος δεν θα κινηθεί.

Με τη βοήθεια της ΑΔΣ για το σύστημα θα έχουμε:

$$4m\upsilon\frac{L}{2}=\left(4m\left(\frac{L}{2}\right)^2+\frac{2}{12}ML^2\right)\omega_{\sigma\upsilon\sigma}$$

Θα βρούμε μετά τις πράξεις $\omega_{\sigma\upsilon\sigma}=5r/s$.

Για την αρχική θέση ισορροπίας θα έχουμε

$2Mg=Kx_1$ άρα $x_1=36/400$ m

Για την τελική ισορροπίας θα έχουμε

$(2M+4m)g=Kx_2$ άρα $x_2=40/400$ m

Μετά την κρούση το Στ=0 άρα το σύστημα θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας του και το κέντρο μάζας του συστήματος θα εκτελεί κατακόρυφη ΓΑΤ εξαιτίας της δύναμης του ελατηρίου και του βάρους του.

Επειδή το κέντρο μάζας του σύστηματος δεν έχει αρχική ταχύτητα το σύστημα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του.

Το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος θα είναι A_{cm}=0,01 m

Ετσι το κέντρο μάζας του συστήματος θα εκτελεί κατακόρυφη Γ.Α.Τ με περίοδο Τ=π/5 sec.

Β. Η μέγιστη κινητική ενέργεια θα είναι όταν το σύστημα περνά από την θέση ισορροπίας του.

$$\text{Αρα } K_{max} = ½\, I_{ολ}\omega_{συσ}^{2} + ½\, M_{ολ}\cdot\upsilon_{cmmax}^{2} = 5{,}02J$$

Γ. Οι σημειακές σφαίρες έχουν συνεχώς συνολική ταχύτητα ίση με το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής ταχύτητας λόγω περιστροφής και την ταχύτητα λόγω της μεταφοράς του κέντρου μάζας του συστήματος.

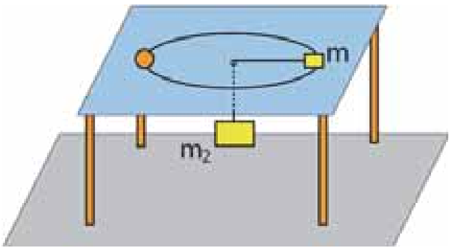
Ετσι η

$$\upsilon_{ολmax} = \omega_{συσ}L/2 + \omega A = 2{,}6m/s \text{ ενώ η}$$

$$\upsilon_{ολmin} = \omega_{συσ}L/2 - \omega A = 2{,}4m/s.$$

Θα μείνει τεντωμένο το νήμα;

Το κιβώτιο του παρακάτω σχήματος είναι κύβος πλευράς 2R μάζας m=1kg και μπορεί να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι ύψους H=1,25m εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R_1=2m με την βοήθεια οριζόντιου τεντωμένου σκοινιού η άλλη άκρη του οποίου βρίσκεται δεμένη με δεύτερο σώμα μάζας m_2=5kg που ισορροπεί κατακόρυφα.



Σφαίρας μάζας M=3kg και ακτίνας R=0,1m τοποθετείται σε ένα σημείο της περιφέρειας της κυκλικής τροχιάς που εκτελεί το σώμα μάζας m_1 με κατάλληλη αρχική γωνιακή ταχύτητα παράλληλη προς το επίπεδο του τραπεζιού και με φορά προς το κέντρο του κύκλου. Κάποια στιγμή τα δύο σώματα συγκρούονται ακαριαία κεντρικά και ελαστικά. Αν μετά την κρούση των δύο σωμάτων η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και το νήμα είναι συνεχώς τεντωμένο να βρεθούν:

Α. Το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του κύβου.
Β. Το μέτρο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας
Γ. Το μέγιστο ύψος που θα κατέβει το σώμα μάζας m_2
Δ. Ποια η τελική κινητική ενέργεια της σφαίρας λίγο πριν χτυπήσει στο έδαφος.

Για την σφαίρα $I_{cm}=0{,}4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για την ισορροπία του σώματος μάζας m_2 θα έχουμε

$$T=m_2g \text{ άρα } T=50N$$

Ο κύβος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και η τάση του νήματος έχει το ρόλος της κεντρομόλου δύναμης.

Έτσι $T=F_\kappa$ άρα $T=m\upsilon^2/R$ και μετά από τις πράξεις $\upsilon=10m/s$

Β. Η κρούση του κύβου και της σφαίρας είναι κεντρική και ελαστική. Οι δυνάμεις κατά την κρούση είναι κεντρικές και έτσι δεν θα προκαλέσουν μεταβολή στην στροφική κίνηση της σφαίρας. Ισχύουν οι τύποι της κεντρικής ελαστικής κρούσης με την σφαίρα αρχικά ακίνητη μεταφορικά.

Έτσι

$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon = -5m/s \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon = 5m/s$$

Επειδή η σφαίρα αμέσως μετά την κρούση κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κύλισης άρα

$$\upsilon_{cm2}'=\omega_o R \text{ άρα } \omega_0=50r/s.$$

Γ. Επειδή συνολικά οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο δεν δημιουργούν ροπή η στροφορμή του κύβου διατηρείται σταθερή. Με την βοήθεια της ΑΔΣ θα έχουμε:

$$m\upsilon_1'R_1=m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}(R_1-y) \text{ ή } \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}=10/(2-y) \ (1)$$

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για όλο το σύστημα και μέχρι να σταματήσει να κατεβαίνει στιγμιαία το σώμα μάζας m_2 θα έχουμε

$$½ mυ_1'^2 + m_2gψ = ½ mυ_{τελ}^2 \quad ή\ 12,5 + 50y = 0,5υ_{τελ}^2 \ (2)$$

Από τις (1) και (2) θα καταλήξουμε στην εξίσωση $4y^3-15y^2+12y=0$ με λύσεις το y=0m y=2,59m & y=1,15m με δεκτή φυσικά την τελευταία μιας και το y δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του R.

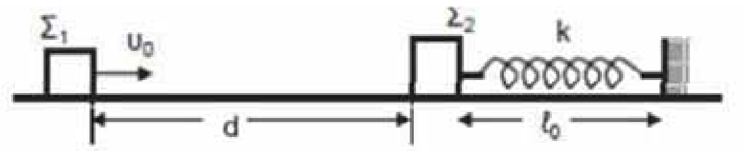
Δ. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την σφαίρα μετά την κρούση θα έχουμε

$$½ Mυ_{cm}^2 + ½ I_{cm}ω_0^2 + MgH = K_{ολεδαφους}$$

θα έχουμε μετά από τις πράξεις $K_{εδαφους}$=90J

Θέμα Γ (ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ 2013)

Σώμα $Σ_1$ με μάζα m_1 κινείται σε οριζόντιο επίπεδο ολισθαίνοντας προς άλλο σώμα $Σ_2$ με μάζα $m_2 = 2\ m_1$, το οποίο αρχικά είναι ακίνητο. Έστω $υ_0$ η ταχύτητα που έχει το σώμα $Σ_1$ τη στιγμή $t_0 = 0$ και ενώ βρίσκεται σε απόσταση d = 1,6 m από το σώμα $Σ_2$. Αρχικά, θεωρούμε ότι το σώμα $Σ_2$ είναι ακίνητο πάνω στο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου με αμελητέα μάζα και σταθερά ελατηρίου k, και το οποίο έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0. Το δεύτερο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Αμέσως μετά τη κρούση, που είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα $Σ_1$ αποκτά ταχύτητα με μέτρο $υ_1΄=1$ m/s και φορά αντίθετη της αρχικής ταχύτητας.

Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δύο σωμάτων με το οριζόντιο επίπεδο είναι μ= 0,5 και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g=10\ m/s^2$.

Α. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα $υ_0$ του σώματος $Σ_1$.
Μονάδες 6

Β. Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε από το σώμα $Σ_1$ στο σώμα $Σ_2$ κατά την κρούση.
Μονάδες 6

Γ. Να υπολογίσετε το συνολικό χρόνο κίνησης του σώματος $Σ_1$ από την αρχική χρονική στιγμή t_0 μέχρι να ακινητοποιηθεί τελικά.

Μονάδες 6

Δ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, αν δίνεται ότι m_2=1kg και k=300 N/m.

Μονάδες 7

Θεωρήστε ότι η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και ότι τα δύο σώματα συγκρούονται μόνο μία φορά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με τη βοήθεια των τύπων τις ελαστικής κρούσης θα βρούμε

$$\upsilon_1' = (m_1 - m_2)u_1/(m_1 + m_2)$$

και με αντικατάσταση θα έχουμε u_1=3m/s

Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην θέση της κρούσης για το σώμα μάζας m_1 θα έχουμε:

$$½\, m_1 u_o^2 = ½\, m_1 u_1^2 + \mu m_1 g d$$ θα βρούμε u_o=5m/s

Β. Η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος m_1 πριν την κρούση με το σώμα m_2 είναι $K_1 = ½\, m_1 u_1^2$

ενώ η κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο δεύτερο σώμα ήταν $K_2' = ½\ m_2 u_2'^2$ όπου u_2' η ταχύτητα του δεύτερου σώματος μετά την κρούση θα βρεθεί από τον γνωστό τύπο της θεωρίας για τις ελαστικές κρούσεις

$$u_2' = 2m_1 u_1/(m_1 + m_2)$$ και μετά από πράξεις u_2'=2m/s

Με την βοήθεια της απλής μέθόδου των τριών θα έχουμε

$$x=100\cdot ½\ m_2u^{2'}/\ ½\ m_1u_1^2=800/9\%$$

Γ. Με τη βοήθεια του νόμου του Νεύτωνα για την επιβραδυνόμενη κίνηση προς την κρούση με το m_2 θα έχουμε

$$T=ma \text{ άρα } \mu mg=ma \text{ άρα } a=5m/s^2.$$

Ετσι για την πρώτη επιβραδυνόμενη κίνηση και μέχρι την κρούση των δύο σωμάτων θα έχουμε: $u=u_o-at_1$ άρα $t_1=0{,}4s$.

Μετά την κρούση των δύο σωμάτων το πρώτο σώμα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση προς τα πίσω άρα και πάλι με το νόμο της επιβραδυνόμενης κίνησης θα έχουμε

$$0=u_1'-at_2 \text{ άρα } t_2=0{,}2s$$

άρα ο συνολικός χρόνος για την κίνηση των πρώτου σώματος θα είναι $t_{ολ}=0{,}6s$.

Δ. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κίνηση του σώματος m_2 θα έχουμε

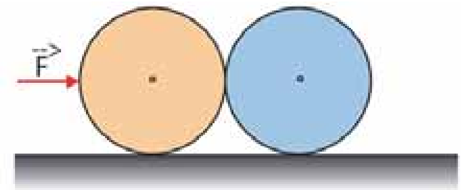
$$½\ m_2u_2'^2=½\ Kx_{max}^2+\mu\ m\ g\ x_{max}$$

και καταλήγοντας στην δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$150x_{max}^2+5\ x_{max}-2=0 \text{ θα καταλήξουμε στο } x_{max}=0{,}1m.$$

Κίνηση δύο σφαιρών

Δύο όμοιες λείες σφαίρες με μάζες $m_1=m_2=1kg$ έχουν ίσες ακτίνες $R_1=R_2$ βρίσκονται σε επαφή πάνω σε οριζόντιο επίπεδο όπως στο παρακάτω σχήμα.



Ασκούμε την χρονική στιγμή t=0 οριζόντια δύναμη F=28N που ο φορέας της περνά από το κέντρο της 1ης σφαίρας και οι σφαίρες αρχίζουν αμέσως να περιστρέφονται χωρίς να ολισθαίνουν πάνω στο οριζόντιο επίπεδο βρισκόμενες συνεχώς σε επαφή. Κάποια χρονική στιγμή η οριζόντια δύναμη F καταργείται.

Α. Να σχεδιασθούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στις δύο σφαίρες αρχικά

Β. Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του κέντρου μάζας των δύο σφαιρών.

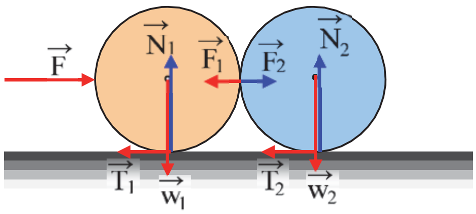
Γ. Να περιγραφεί η κίνηση των δύο σφαιρών μετά την κατάργηση της δύναμης F αν υποθέσουμε ότι οι σφαίρες συνεχίζουν να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν.

Δ. Αν την στιγμή της κατάργησης της δύναμης η δεύτερη σφαίρα συγκρουστεί τέλεια ελαστικά με λείο κατακόρυφο τοίχο και η κρούση διαρκέσει ελάχιστα ποια η ταχύτητα του ανώτερου σημείου της 1ης σφαίρας και ποια η ταχύτητα του κατώτερου σημείου της δεύτερης σφαίρας αμέσως μετά την κρούση των δύο σφαιρών;

$I_{cm}=0,4.m.R^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Οι δυνάμεις εμφανίζονται στο παρακάτω σχήμα.



Β. Αν εφαρμόσουμε του νόμους για την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση της κάθε σφαίρας θα έχουμε

$$F-T_{1\sigma\tau}-F_1=m_1.\alpha (1)$$

$$F_2-T_{2\sigma\tau}=m_2.\alpha \quad (2)$$

$$T_1.R_1=0,4m_1.R_1^{\ 2}\ .\alpha_{\gamma\omega\nu 1}\ (3)$$

$$T_2.R_2=0,4m_2.R_2^{\ 2}.\alpha_{\gamma\omega\nu 2}\ (4)$$

Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων $\alpha=10m/s^2$.

Γ. Αν υποθέσουμε ότι οι σφαίρες μετά την κατάργηση της δύναμης F βρίσκονται ακόμη σε επαφή θα έπρεπε να έχουν ίδια επιτάχυνση-επιβράδυνση του κέντρου μάζας τους και ίδια γωνιακή επιτάχυνση-επιβράδυνση. Οι στατικές τριβές θα έπρεπε να έχουν τα ίδια μέτρα και οι σχέσεις για τις μεταφορικές κινήσεις θα έπρεπε να είναι

$$F-T_{\sigma\tau}=m.a\ (5)$$

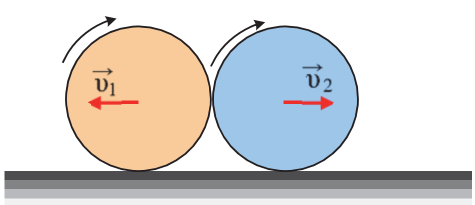
για την πρώτη σφαίρα και

$$T_{στ}+F=m.a \ (6)$$

για την δεύτερη σφαίρα. Από τις σχέσεις (5) και (6) καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα δεν μπορεί οι σφαίρες να βρίσκονται σε επαφή. Ετσι οι σφαίρες θα κινούνται ομαλά μεταφορικά και στροφικά και μόλις που δεν θα βρίσκονται σε επαφή.

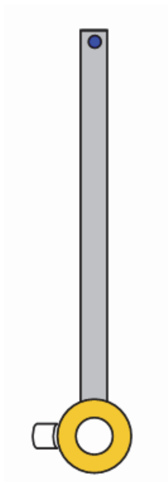
Δ. Επειδή οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κρούση είναι κεντρικές και η κρούση διαρκεί απειροελάχιστα η στροφική κατάσταση των δύο σφαιρών δεν μπορεί να αλλάξει. Η πρώτη λοιπόν ελαστική κρούση της δεύτερης σφαίρας με τον τοίχο θα αλλάξει την φορά της ταχύτητας του κέντρου μάζας χωρίς όμως να αλλάξει ούτε την στροφική κατάσταση της σφαίρας αλλά ούτε και το μέτρο της ταχύτητας του κέ- ντρου μάζας. Η δεύτερη ελαστική κρούση της δεύτερης σφαίρας με την πρώτη σφαίρα θα επιφέρει ανταλλαγή των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών χωρίς όμως και πάλι να αλλάξει την στροφική κατάσταση των δύο σφαιρών.

Ετσι οι σφαίρες θα συνεχίσουν να περιστρέφονται δεξιόστροφα όπως στην αρχή αλλά η πρώτη σφαίρα θα τείνει να απομακρυνθεί από τον τοίχο ενώ η δεύτερη σφαίρα θα τείνει να πλησιάσει προς τον τοίχο. Έτσι το ανώτερο σημείο της $1^{ης}$ σφαίρας θα έχει ταχύτητα 0 όπως ακριβώς και το κατώτερο σημείο της $2^{ης}$ σφαίρας.



Μια δύσκολη ροπή αδράνειας και ο φελλός που πετάγεται.

Κατακόρυφη ράβδος μήκους L=1m και μάζας M=3Kg συγκολλάται στο ένα της άκρο με σφαίρα μάζας M΄=0,8 kg και ακτίνας R=0,4m έτσι ώστε ο κατακόρυφος άξονας της ράβδου να περνάει από το κέντρο της σφαίρας. Το άλλο άκρο της ράβδου το στερεώνουμε με οριζόντιο καρφί. Αφαιρούμε από το εσωτερικό της σφαίρας όλη της ποσότητα της ύλης που βρίσκεται στο κέντρο και σε ακτίνα R/2 από αυτό και δημιουργούμε μία καινούργια κοίλη σφαίρα.



Δημιουργούμε μία πολύ μικρή οριζόντια οπή που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και γεμίζουμε το κοίλο χώρο με μικρή ποσότητα ιδανικού αερίου. Ταπώνουμε τη μικρή οπή με φελλό μάζας m=0,1kg. Θερμαίνουμε την σφαίρα οπότε κάποια στιγμή ο φελλός εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ. Αν το σύστημα ράβδου-σφαίρας μόλις και φτάνει σε οριζόντια θέση, να βρεθούν:

Α. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου-κοίλης σφαίρας γύρω από τον άξονα περιστροφής του.

Β. Την μέγιστη τιμή του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδου-κοίλης σφαίρας.

Γ. Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε από το αέριο στο μηχανικό σύστημα φελλός-ράβδο-κοίλη σφαίρα.

Δίνονται $I_{cmράβδου}=1/12\ M\ L^2$ και $I_{cmσφαιρας}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Αν η σφαίρα ήταν γεμάτη θα είχε $I_{cm}=0,4MR^2$. Τώρα όμως έχουμε αφαιρέσει μάζα άρα η ροπή αδράνειας της κοίλης σφαίρα θα είναι:

$$I_{cm}΄=I_{cm}-I_{αφαιρ}=0,4MR^2-0,4M_{αφ}\cdot(R/2)^2.$$

Η πυκνότητα της σφαίρας που αφαιρέσαμε ήταν ίδια με την πυκνότητα της σφαίρας που έμεινε αφού το υλικό είναι το ίδιο έτσι

$$M/V=M_{αφ}/V_{αφ} \text{ άρα: } M/4/3πR^3=M_{αφ}/4/3π(R/2)^3 \text{ έτσι } M_{αφ}=M/8$$

$$I_{cm}'=I_{cm}-I_{αφαιρ}=0{,}4MR^2-0{,}4M_{αφ}.(R/2)^2=0{,}4.0{,}8.0{,}4^2-0{,}4.0{,}1.0{,}2^2=0{,}0496Kg.m^2.$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε κανόνα Στάινερ και για την ράβδο και για την σφαίρα θα βρούμε τη ροπή αδράνειας του συστήματος:

$$I_{ολ}=1/12ML^2+M(L/2)^2+I_{cm}'+M_{κοιλ}.(L+R)^2 \rightarrow$$

$$I_{ολ}=1/3.3.1^2+0{,}0496+0{,}7.1{,}4^2=2{,}4216Kg{\cdot}m^2.$$

Β. Η μέγιστη τιμή του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδου-κοίλης σφαίρας θα συμβεί όταν τα αποστήματα των βαρών της σφαίρας και της ράβδου γίνουν μέγιστα. Αυτό θα συμβεί όταν το σύστημα βρεθεί στην οριζόντια θέση.

$$\left|ΔL/Δt\right|_{max}=MgL/2+M_{κοιλ}.g.(L+R)=24{,}8N.m$$

Γ. Το αέριο έδωσε την ενέργεια για να καταφέρουν να κινηθούν ο φελλός η ράβδος και η κοίλη σφαίρα.

$$E_{αερίου}=K_{φελ}+K_{συστ} \ (1)$$

Για την άνοδο του στερεού θα πάρουμε από την ΑΔΕ $K_{συστ}=U_{ραβ}+U_{σφ}$

Αρα ½ $I_{ολ}.ω^2=MgL/2+M_{κοιλ}.g.(L+R)$ άρα μετά από πράξεις ω=4,5r/s

Αν εφαρμόσουμε ΑΔΣ για το σύστημα θα έχουμε

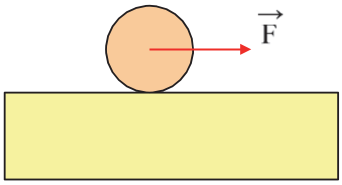
$$L_{αρχ}=L_{τελ} \qquad 0=mU(L+R)-I_{ολ}.ω$$

θα βρούμε μετά από πράξεις υ=77,8m/sec

Με αντικατάσταση στην (1) $E_{αερ}=½\, I_{ολ}.ω^2+½\, m{\cdot}υ^2=327{,}1J$

Μια μπανιέρα Αγιοβασιλιάτικη!!!

Στο χωριό του Αι-Βασίλη υπήρχε μία παγωμένη οριζόντια μπανιέρα που παρουσίαζε συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0{,}08-0{,}1x$ (S.I.). Πάνω στη μπανιέρα και στην θέση $x=0$ υπάρχει κύλινδρος με μάζα $M=1kg$. Ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου οριζόντια σταθερή δύναμη μέτρου $F=1{,}5N$ και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται.



Να βρεθούν :

Α. Η θέση στην οποία ο κύλινδρος είναι έτοιμος να ολισθήσει.

Β. Να βρεθεί η ολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου σε εκείνη τη θέση.

Γ. Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου στη θέση όπου το επίπεδο γίνεται λείο.

Για τον κύλινδρο $I_{cm}=0{,}5MR^2$.

Χωριό του Αι-Βασίλη δεν υπάρχει όπως φυσικά και η παραπάνω μπανιέρα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να αρχίσει να ολισθαίνει θα πρέπει να πάψει να ισχύει η συνθήκη κύλισης δηλαδή η σχέση $T_{στ}<\mu N$. Από τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση όταν ο κύλινδρος κυλίεται θα πάρουμε:

$$F\text{-}T_{στ}=M\cdot a_{cm}\ (1)\ και\ T_{στ}.R=0,5MR^2\cdot α_{γων}\ άρα$$

$$T_{στ}=0,5Ma_{cm}\ (2)$$

με αντικατάσταση της (2) στην (1) θα έχουμε:

$$F\text{-}0,5Ma_{cm}=Ma_{cm}\ και$$

$$a_{cm}=1m/sec^2$$

$$και\ από\ την\ (2)\ T_{στ}=0,5N.$$

Από την συνθήκη κύλισης $0,5<(0,08\text{-}0,1x)10$ άρα $x<0.3m$.

Ετσι ο κύλινδρος μέχρι τη θέση $x<0,3m$ κυλίεται και στην θέση $x=0,3m$ είναι έτοιμος να ολισθήσει.

Β. Η κίνηση του κυλίνδρου είναι επιταχυνόμενη άρα:

$$υ_{cm}=a_{cm}.t\ (3)\ \ και\ x=1/2a_{cm}.t^2$$

άρα $0,3=1/2.1.t^2$ άρα $t=\sqrt{0{,}6}sec$ και από την (3) $υ_{cm}=\sqrt{0{,}6}m/sec$

$$K_{ολ}=K_{περ}+K_{μετ}=1/2MU_{cm}^2+1/2Iω^2=0,5.0,6+1/4.1.0,6=0,45J$$

Το ίδιο θα μπορούσε να προκύψει και από την ΑΔΕ με WF=Κολ άρα

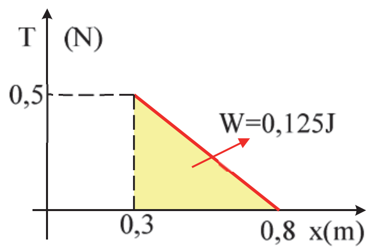
$$K_{ολ}=1,5.0,3=0,45J$$

Γ. Μετά τη θέση $x=0,3m$ ο κύλινδρος αρχίζει να ολισθαίνει άρα δέχεται τριβή ολίσθησης μέχρι τη θέση που το επίπεδο γίνεται λείο δηλαδή την θέση όπου το $μ=0$ άρα $0,08=0,1x$ άρα $x=0,8m$.

Αν εφαρμόσουμε ΘΜΚΕ για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου θα πάρουμε

W_F-$W_{Τολίσ}$=$K_{τελμετ}$-$K_{αρχμετ}$ (4)

από x=0,3m μέχρι το x=0,8m το W_F=1,5·0,5=0,75J η τριβή ολίσθησης έχει εξίσωση T=μ.N=μMg=0,8-x (S.I) το μεταφορικό της έργο θα βρεθεί από το παρακάτω διάγραμμα



Ετσι αν αντικαταστήσουμε τις τιμές στην (4) θα έχουμε

$$0,75-0,125=½·1·U_{cmτελ}^{2}-1/2.1.0,6$$

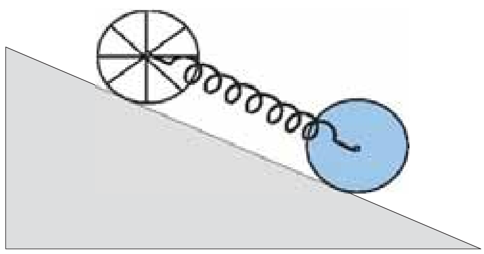
θα πάρω $U_{cmτελ}$=√1,85m/sec.

Μια παραλλαγή του θέματος 2010

Από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίση $\varphi=30^{o}$ αφήνουμε να κυλίσουν χωρίς να ολισθαίνουν ταυτόχρονα ένας δίσκος και ένας δακτύλιος ίδιας μάζας M=1,4kg και ίδιας ακτίνας R=0,1m.

A. Να υπολογιστεί ποιό από τα δύο σώματα θα αποκτήσει μεγαλύτερη επιτάχυνση.

B. Συνδέουμε με κατάλληλο τρόπο τα κέντρα μάζας των δύο στερεών,όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,με ιδανικό ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς K=100N/m,το οποίο δεν εμποδίζει την περιστροφή και δεν προκαλεί κάθε είδους τριβές.Το σύστημα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατερχόμενο του κεκλιμένου επιπέδου με το ελατήριο να έχει σταθερό μήκος.



Να βρεθούν :

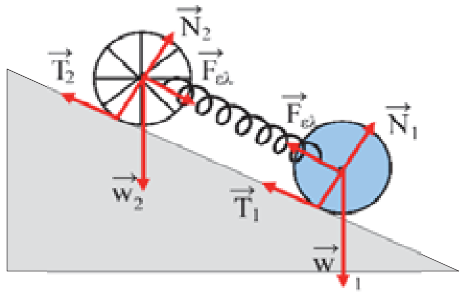
i. Η επιμήκυνση ή η συσπείρωση του ελατηρίου έτσι ώστε το σύστημα να κατέρχεται κυλιόμενο χωρίς να ολισθαίνει.

ii. Η ταχύτητα του κέντου μάζας του κάθε στερεού την χρονική στιγμή t_1 αν το σύστημα εκείνη την στιγμή έχει κατέλθει κατακόρυφη απόσταση ΔH=0,35 m

iii. Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος την παραπάνω χρονική στιγμή t_1.

Για τον κύλινδρο $Icm=0,5M\cdot R^2$ και για το δαχτυλίδι $Icm=M\cdot R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



A. Από τους νόμους της μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης θα έχουμε

$$M.g.\eta\mu\varphi - T = Ma \qquad \text{και } T.R = \lambda.M.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

θα βρούμε $a=g\eta\mu\varphi/(\lambda+1)$ και με αντικατάσταση του λ θα βρούμε

$$a_{\delta\acute{\iota}\sigma\kappa o\upsilon}=10/3\ m/sec^2 \text{ και}$$

$$\alpha_{\delta\alpha\kappa}=2,5m/sec^2.$$

B.

i. Επειδή η επιτάχυνση του δίσκου είναι μεγαλύτερη από αυτή του δαχτυλιδιού κατά την ελεύθερη κάθοδό τους για να κατεβαίνουν τώρα σαν σύστημα θα πρέπει να αποκτήσουν κοινή επιτάχυνση. Έτσι θα πρέπει η επιτάχυνση του δίσκου να γίνει πιο μικρή από την επιτάχυνση της ελεύθερης «κατάβασης» και του δακτυλίου πιο μεγάλη σε σχέση με την επιτάχυνση της ελεύθερης «κατάβασης». Έτσι το ελατήριο πρέπει να είναι συσπειρωμένο για να αυξήσει την επιτάχυνση του δακτυλίου και να μειώσει την επιτάχυνση του δίσκου.

Με την βοήθεια των νόμων της κίνησης για την μεταφορική και στροφική κίνηση θα έχουμε

Για τον δίσκο $M.g.\eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau1} - F_{\varepsilon\lambda} = Ma_1$ (1) και $T_{\sigma\tau1}.R = 0{,}5.M.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu1}$ (2)

Για το δαχτυλίδι $M.g.\eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau2} + F\varepsilon\lambda = Ma_2$ (3) και $T_{\sigma\tau2}.R = M.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu\,2}$ (4)

Κάνοντας πράξεις θα βρούμε $F_{\varepsilon\lambda}=1N$ άρα $x_{\varepsilon\lambda}=0{,}01m$

ii. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική θέση

$$2M.g.H = 1/2.I_1.\omega_1^2 + 1/2.M.U_1^2 + 1/2I_2.\omega_2^2 + 1/2.M.U_2^2$$

Με αντικατάσταση $U_{cm}=2m/sec$

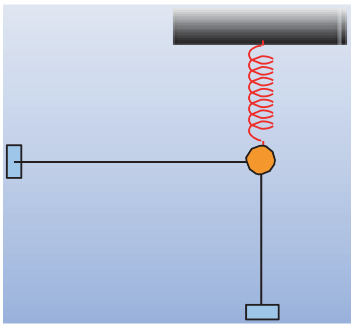
iii. Με βάση την θεωρία ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος θα δίνεται από την σχέση

$\Delta L/\Delta t = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho} = T_{\sigma\tau1}.R + T_{\sigma\tau2}.R$ (5) Με την βοήθεια των σχέσεων θα βρούμε $T_{\sigma\tau1}=2N$ και $T_{\sigma\tau2}=4N$ άρα με αντικατάσταση στην σχέση (5) θα βρούμε

$$\Delta L/\Delta t = 0{,}6Kg.m^2/sec$$

Μια πηγή και δύο κύματα.

Δύο λεπτότατες χορδές η μία από σίδηρο και άλλη από αλουμίνιο συγκολλούνται σε ένα σημειακό σώμα μάζας m=1kg έτσι ώστε η πρώτη να είναι οριζόντια και η δεύτερη να είναι κατακόρυφη. Δένουμε το σημειακό σώμα σε ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς K=100N/m το άλλο άκρο του οποίου βρίσκεται δεμένο σε ακλόνητο ταβάνι όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνουμε αρχική ταχύτητα στο σημειακό σώμα $υ_0$=1m/s με φορά προς τα πάνω. Αν η ταχύτητα των κυμάτων που θα δημιουργηθούν στην κάθε χορδή είναι $υ_{Al}$=20m/s και $υ_{Fe}$=10m/s να βρεθούν:

Α. Το είδος των κυμάτων που θα διαδοθεί στην κάθε χορδή.

Β. Η εξίσωση του κάθε κύματος στην κάθε χορδή.

Γ. Να αποτυπωθούν ποιοτικά τα στιγμιότυπα των δύο χορδών όταν η πηγή έχει εκτελέσει 2 πλήρεις ταλαντώσεις.

Να υποθέσουμε ότι τα δύο σύρματα είναι τόσο λεπτά που δεν επηρεάζουν την ταλάντωση του σημειακού σώματος καθώς επίσης και ότι οι χορδές είναι συνεχώς τεντωμένες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Στην οριζόντια ράβδο από σίδηρο θα διαδοθεί εγκάρσιο αρμονικό κύμα μιας και η πηγή ταλαντώνεται κάθετα στην διάδοση του κύματος. Στην κατακόρυφη χορδή από αλουμίνιο θα διαδοθεί διαμήκες κύμα μιας και η πηγή δημιουργίας του κύματος ταλαντώνεται παράλληλα προς τη διάδοση του κύματος.

Β. Το σημειακό σώμα μάζας m θα λειτουργεί ταυτόχρονα σαν πηγή των δύο παραπάνω κυμάτων με

$$\text{περίοδο } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{5}s \quad \text{και πλάτους } A = \frac{\upsilon_0}{\omega} = 0{,}1m$$

Από το νόμο της κυματικής και για το κάθε μέσο διάδοσης των κυμάτων θα έχουμε για τα μήκη κύματος υ=λf άρα για τη χορδή του σιδήρου $\lambda_{Fe}=2\pi$ m και για τη χορδή από αλουμίνιο $\lambda_{Al}=3\pi$ m

Ετσι η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται στην σιδερένια χορδή θα είναι

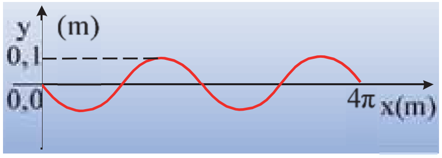
$$y_{Fe} = 0{,}1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{5t}{\pi} - \frac{x}{2\pi}\right) \text{ (S.I.)}$$

ενώ για το κύμα που διαδίδεται στην κατακόρυφη χορδή από αλουμίνιο η εξίσωση θα έχει μορφή

$$y_{Al} = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(2\pi\left(\frac{5t}{\pi} - \frac{y}{3\pi}\right) + \pi\right) \text{ (S.I.)}$$

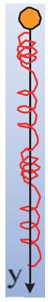
μιας και την χρονική στιγμή t=0 η πηγή βρίσκεται στην ΘΙΤ αλλά έχει ταχύτητα προς τα πάνω.

Γ. Η ποιοτική μορφή της οριζόντιας χορδής θα είναι η παρακάτω



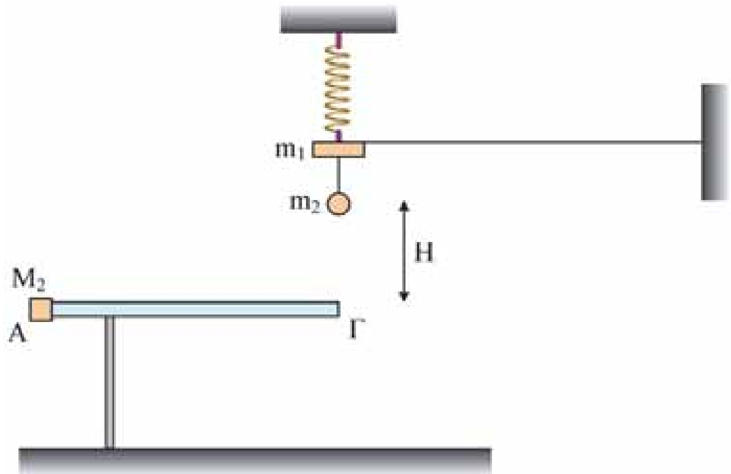
Αν αναφερόμαστε στην κατακόρυφη χορδή, διαδίδεται διαμήκες κύμα οπότε προφανώς δε θα αλλάξει η μορφή της και βλέποντάς την κάποιος δεν θα παρατηρήσει αλλαγή στην μορφή της.

Αν μπορούσαμε να φανταστούμε τις αλλαγές στην πυκνότητα του υλικού, τότε θα είχαμε μια εικόνα, όπως στο παρακάτω σχήμα, όπου αντιστοιχούμε τη χορδή με ελατήριο, πάνω στο οποίο θα μπορούσαμε να δούμε τα πυκνώματα και τα αραιώματα.



Μια πραγματικά σύνθετη άσκηση

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος ΑΓ έχει μάζα M=2kg και μήκος L=6m ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια καρφιού που βρίσκεται σε απόσταση l=2m από το ένα της άκρο της Α. Στο άκρο Α υπάρχει κολλημένο πάνω στη ράβδο σώμα μάζας M_2.



Πάνω στην ίδια κατακόρυφο με την άλλη άκρη Γ της ράβδου υπάρχει κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=200\pi^2$N/m με την πάνω άκρη του στερεωμένη. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σώμα μάζας m_1=0,5kg στο άκρο του οποίου είναι δεμένη οριζόντια ελαστική χορδή πάνω στην οποία μπορεί να διαδοθεί εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα U=2 m/sec.Μέσω ενός δεύτερου κατακόρυφου νήματος το σώμα μάζας m_1 συνδέεται με δεύτερο σώμα μάζας m_2=0,5kg.Το σώμα μάζας m_2 απέχει κατακόρυφη απόσταση από το άκρο Γ της ράβδου ύψος H=1,25m. Στο σώμα μάζας m_1 υπάρχει ηχητική πηγή αρμονικών ήχων συχνότητας F_s=680Hz ενώ στο σώμα μάζας m_2 υπάρχει ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων. Κάποια στιγμή το κατακόρυφο νήμα κόβεται και το σώμα μάζας m_2

συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο. Να βρεθούν:

A. Η μάζα M_2
B. Να βρεθεί η εξίσωση που περιγράφει την συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής ήχων που βρίσκεται στο σώμα μάζας m_2 μέχρι την στιγμή που αυτή συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο και να βρεθεί η συχνότητα του ανιχνευτή ελάχιστα πριν την κρούση.
Γ. Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την πλαστική καθώς και η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής αμέσως μετά την πλαστική κρούση αν υποθέσουμε ότι η κρούση ήταν ακαριαία.
Δ. Η μορφή της οριζόντιας ελαστικής χορδής την στιγμή που γίνεται η πλαστική κρούση.

Δίνεται για την ράβδο $I_{cm}=1/12\ M.L^2$ η ταχύτητα του ήχου $U_{ηχ}=340m/sec$ το $g=10m/sec^2$ και $\pi^2=10$.
Ολα τα σώματα εκτός της ράβδου να θεωρηθούν σημειακά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Για να ισορροπεί η ράβδος θα ισχύει η σχέση ισορροπίας $Στ(O)=0$
άρα $-M.g.(L/2 - l) + M_2.g.l=0$ άρα $M_2=1kg$.
B. Για την ισορροπία των σωμάτων m_1-m_2 με το ελατήριο θα ισχύει $(m_1+m_2).g=Kx_1$ άρα $x_1=1/200$ m ενώ μετά το κόψιμο του νήματος θα ισχύει για την ισορροπία του σώματος m_1
$m_1.g=Kx_2$ άρα $x_2=1/400$ m.
Την στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα m_1 δεν έχει ταχύτητα άρα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης της και αν

υποθέσουμε ότι η θετική φορά είναι προς τα πάνω θα βρίσκεται στην ΘΕΑ. Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A=x_1-x_2=1/400$ m και η εξίσωση της ταχύτητας θα δίνεται από την σχέση

$$u=\pi/20 \text{ συν}(20\pi+3\pi/2) \text{ (S.I)}$$

Το σώμα m_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση μέχρι να χτυπήσει την ράβδο. Ο χρόνος που θα χρειασθεί το σώμα m_2 για να χτυπήσει την ράβδο θα βρεθεί από την σχέση

$$H=1/2\ g.t^2 \ \text{ άρα } \ t=0{,}5\text{sec.}$$

Ετσι η ταχύτητα του σώματος m_2 θα δίνεται από την σχέση

$V=10.t \ \ t<0{,}5$sec .

Από την σχέση για το φαινόμενο Doppler θα έχουμε

$$F_{αν}=(U_{ηχ}-V).F_s/(U_{ηχ}+u)= (340-10t)680/\{340+\pi/20 \text{ συν}(20\pi t+3\pi/2)\} \text{ (S.I.) (1)}$$

Η κρούση θα συμβεί την στιγμή $t=0{,}5$sec άρα η συχνότητα θα είναι

$$F_{αν}=670\text{Hz.}$$

Γ. Για την κρούση του m_2 με την ράβδο θα εφαρμόσουμε ΑΔΣ

$$m_2.V.(L-l)=I_{ολ}.\omega_{συστ} \text{ (2)}$$

Το $I_{ολ}=1/12\ .M.L^2\ +M.(L/2\ -l)^2\ +M_2.l^2+m_2.(L-l)^2=20\text{kg.m}^2$ άρα με αντικατάσταση στη σχέση (2) $\omega_{συστ}=0{,}5$r/sec

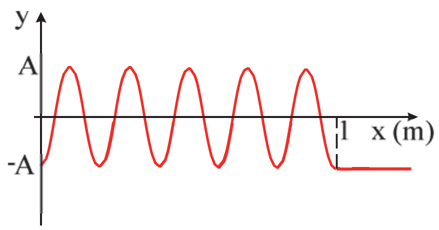
Η γραμμική ταχύτητα εκείνη τη στιγμή του σώματος m_2 είναι

$$V'=\omega_{συστ}(L-l)=2\text{m/sec}$$

Ετσι από την σχέση (1) θα βρούμε $F_{αν}{}'$=676Hz.

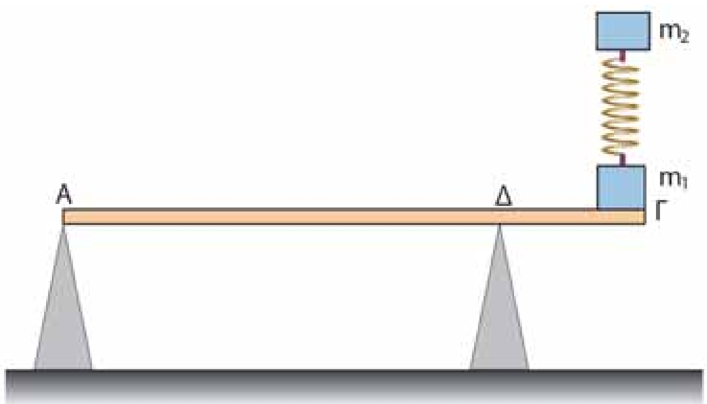
Δ. Το σώμα m_1 μετά το κόψιμο του νήματος θα γίνει η πηγή κύματος που θα διαδοθεί στην οριζόντια ελαστική χορδή. Ο χρόνος t=0,5sec αντιστοιχεί σε 5T άρα το κύμα έχει διαδοθεί στην χορδή 5λ.

Από την σχέση U=λ.f άρα λ=0,2m.Αρα το σχήμα της χορδής θα είναι



Μια ράβδος και δύο σώματα.

Η ράβδος ΑΓ του παρακάτω σχήματος έχει μάζα M= 4Kg και μήκος L=4 m. Στο άκρο Γ της ράβδου είναι κολλημένο σώμα μάζας m_1=0,5Kg και μέσω ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K=200N/m ισορροπεί δεύτερο σώμα μάζας m_2= 0,5 kg όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια δύο υποστηριγμάτων στα σημεία Α και Δ με την απόσταση ΑΔ=3 m. Την χρονική στιγμή t=0 το σώμα μάζας m_2 εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα U_0. Το σύστημα μόλις και καταφέρνει να μην χάνει την επαφή του με το σημείο Α του υποστηρίγματος. Να βρεθούν:

Α. Η αρχική ταχύτητα U_0

Β. Οι χρονικές εξισώσεις των κατακόρυφων δυνάμεων που δέχεται η ράβδος από τα υποστηρίγματα Α και Δ. Μπορεί να χαθεί η επαφή της ράβδου με το υποστήριγμα Δ.

Γ. Θα μπορούσε να εξελιχθεί το φαινόμενο χωρίς το σώμα m_1 να είναι κολλημένο στο σημείο Γ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για να μην χαθεί οριακά η επαφή στο σημείο Α θα πρέπει η δύναμη επαφής στο σημείο Α οριακά να μηδενιστεί.Με την βοήθεια της συνθήκης ισορροπίας για το σύστημα εκείνη την στιγμή θα έχουμε $\Sigma\tau(\Delta)=0$ άρα $-m_1.g.(\Gamma\Delta) - F_{\varepsilon\lambda}.(\Gamma\Delta) + M.g.(K\Delta)=0$ άρα $x_{\varepsilon\lambda}=35/200$ m. Η αρχική συσπείρωση του ελατηρίου θα βρεθεί από την ισορροπία του σώματος m_2

$$M_2.g=K.x_{\alpha\rho\chi} \quad \text{άρα } x_{\alpha\rho\chi}=5/200 \text{ m}$$

Το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης του σώματος m_1 για να μην συμβαίνει ανατροπή του συστήματος θα είναι $A=x_{\varepsilon\lambda}-x_{\alpha\rho\chi}=0{,}15$m
Η αρχική ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 θα είναι και η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης

$$\text{Αρα } U_o=\omega.A=\sqrt{K/m_2}\,.A=3\text{m/sec}$$

Β. Από τις συνθήκες ισορροπίας για την ράβδο θα έχουμε

$$N_A+N_\Delta=M.g+m_1.g+F_{\varepsilon\lambda} \quad (1)$$

$$\Sigma\tau(\Gamma)=0 \quad 4N_A+N_\Delta.1-M.g.2=0 \quad \text{θα βρεθεί } 4N_A+N_\Delta=80 \quad (2)$$

Από την ταλάντωση του σώματος m_2

$$F_{\varepsilon\lambda}-m_2.g=-K.A\eta\mu\omega t \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) ,(2) και (3) θα βρεθούν

$$N_A=10+10\eta\mu 20t \;\&\; N_\Delta=40-40\eta\mu 20t \text{ (S.I.)}$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι $N_\Delta \geq 0$ άρα μόλις και δεν χάνει την επαφή του με το υποστήριγμα Δ η ράβδος.

Γ. Για να συνεχίσει κανονικά το φαινόμενο θα πρέπει το σώμα με μάζα m_1 να μην χάνει την επαφή του με το σημείο Γ.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει $N_1 \geq 0$.Από την ισορροπία του σώματος μάζας m_1 θα έχουμε

$$N_1 = F_{\varepsilon\lambda} + m_1.g$$

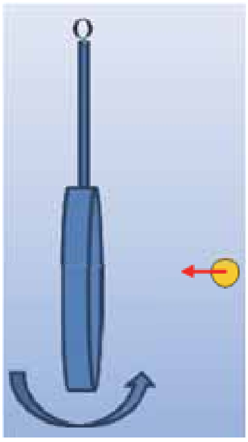
$$\text{άρα } N_1 = 10 - 30\text{ημ}30t \quad (3).$$

Από την σχέση (3) παρατηρούμε ότι η N_1 παίρνει και αρνητικές τιμές πράγμα άτοπο.

Ετσι το φαινόμενο δεν μπορεί να εξελιχθεί ομαλά.

Μια ρακέτα του τένις.

Μια ρακέτα του τένις μπορούμε να τη θεωρήσουμε ότι αποτελείται από μία λεπτή ομογενής ξύλινη ράβδο μάζας M=300gr και μήκους L=10cm και από ένα λεπτό ελαστικό δίσκο μάζας m=400gr και ακτίνας R=10cm που είναι κολλημένα μεταξύ τους στο άκρο της ξύλινης ράβδου με την ευθεία της ράβδου να διέρχεται από το κέντρο του ελαστικού δίσκου. Στο άκρο της ράβδου που δεν είναι ενωμένο με το δίσκο ανοίγουμε μία μικρή οπή έτσι ώστε το σύστημα να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον οριζόντιο άξονα O που είναι συνεχώς παράλληλος με το επίπεδο του ελαστικού δίσκου όπως το παρακάτω σχήμα.



Η ρακέτα αφήνεται ελεύθερη από το ανώτερό της σημείο και όταν αποκτά την μέγιστη ταχύτητά της για πρώτη φορά συγκρούεται τελείως ελαστικά με μία σημειακή μπάλα του τένις μάζας m_1=100gr που κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ=10m/s. Η σύγκρουση είναι ακαριαία και πραγματοποιείται στο κέντρο του ελαστικού δίσκου.

Να βρεθούν:

Α. Η ροπή αδράνειας της ρακέτας γύρω από τον άξονα περιστροφής της O.

Β. Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ρακέτας πριν την κρούση

Γ. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ρακέτας αλλά και το μέτρο της ταχύτητας της μπάλας μετά την κρούση.

Δ. Τη μέγιστη γωνία εκτροπής της ρακέτας μετά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου $I_{cm}=1/12\ ML^2$ ενώ η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι $I_Δ= mR^2/4$ για άξονα που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του δίσκου και περνάει από το κέντρο μάζας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Για τη ράβδο και για τον ελαστικό δίσκο με τη βοήθεια του κανόνα του Στάινερ θα βρούμε

$I_{ολ}=I_{ραβ}+I_Δ=1/12\ ML^2 + M L^2/4+ m R^2/4+ m(R+ L)^2= 0{,}018Kg\ m^2$.

Β. Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ρακέτας θα συμβεί όταν η ρακέτα θα βρίσκεται στην χαμηλότερή της θέση και με τη βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε

$$MgL+mg2(L+R)=K_{max} \text{ άρα } K_{max}=1{,}9J$$

Γ. Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι ελαστική μπορούμε κατ΄αναλογία με την ελαστική κρούση δύο σφαιρών να εφαρμόσουμε τους τύπους της ελαστικής κρούσης

$$\omega_1' = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\omega_1 + \frac{2I_2}{I_1 + I_2}\omega_2 \quad \text{και} \quad \omega_2' = \frac{2I_1}{I_1 + I_2}\omega_1 + \frac{I_2 - I_1}{I_1 + I_2}\omega_2$$

με $I_1=0{,}018kg.m^2$ & $I_2=m_1(L+R)^2=0{,}004kg.m^2$ οπότε

$$\omega_1 = \frac{10}{3}\sqrt{19}rad/s \quad \text{και} \quad \omega_2 = -\frac{\upsilon}{R+L} = -50rad/s$$

μετά από πράξεις θα βρούμε

$\omega_1'=-8{,}95r/s$ & $\omega_2'=55{,}55r/s$ άρα $\upsilon_2'=\omega_2'(R+L)=11{,}11m/s$

Δ. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο και μέχρι την ανώτερη θέση της ρακέτας θα έχουμε

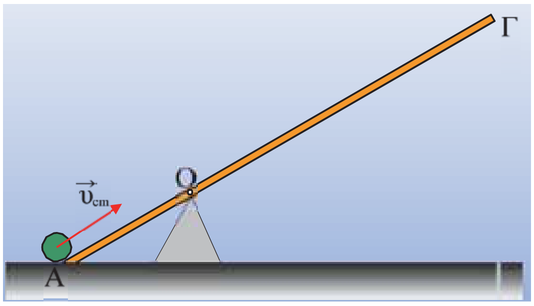
$$\frac{1}{2}I_{ολ}\omega_1'^2 = Mgh_1 + mgh_2$$

Με $h_1 = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}συνφ$ και $h_2 = (L+R) - (L+R)συνφ$

θα βρούμε μετά από πράξεις $συνφ_{max}=0,24$

Μια σφαίρα και μια σανίδα.

Μία λεπτότατη και άκαμπτη ράβδος ΑΓ μάζας M=2Kg και μήκους L=1,12m μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα Ο που απέχει από το έδαφος ύψος H=L/8 ενώ η απόσταση του άξονα Ο από το σημείο Α είναι ΑΟ=L/4. Μία σφαίρα μάζας m=4Kg και ακτίνας R=0,28 m τοποθετείτε στο άκρο Α έτσι ώστε το άκρο Α να βρίσκεται στο έδαφος και η ράβδος να παίζει το ρόλο κεκλιμένου επιπέδου. Δίδουμε στη σφαίρα κατάλληλη αρχική ταχύτητα μέτρου υ_{cmA}=3m/s έτσι ώστε η σφαίρα να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ανερχόμενη στην ράβδο.



Να βρεθούν:

Α. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας την στιγμή που χάνεται η επαφή του σημείου Α με το έδαφος.

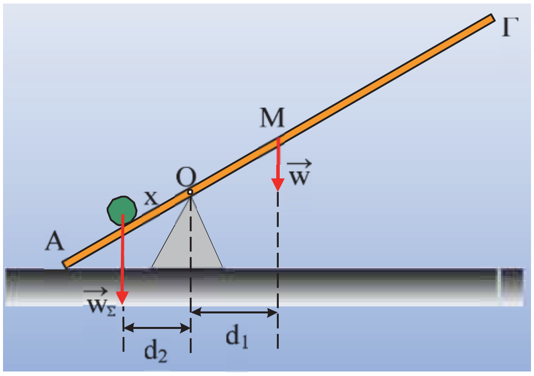
Β. Οι περιστροφές που έχει εκτελέσει η σφαίρα μέχρι να χάσει την επαφή της με τη ράβδο αν αυτό συμβεί τη χρονική στιγμή που η ράβδος βρίσκεται σε οριζόντια θέση. Υποθέστε ότι σε όλη την διάρκεια της κίνησης της σφαίρας πάνω στην ράβδο ότι η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Γ. Πόση είναι η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος σφαίρας-ράβδου τη στιγμή που χάνουν την επαφή τους.

Δίνεται για τη σφαίρα I_{cm}=0,4MR^2 και g=10m/s^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η επαφή του σημείου Α με το έδαφος θα χαθεί όταν η δύναμη αντίδρασης του δαπέδου θα μηδενιστεί. Σε εκείνο το σημείο που είναι και το τελευταίο σημείο ισορροπίας της σανίδας θα ισχύει



Στ(ο)=0 άρα

$$-Mgd_1+mgd_2=0 \text{ άρα}$$

$$-20d_1+40d_2=0 \text{ με } d_1=Lσυν30^o/4 \text{ άρα } d_2=Lσυν30^0/8$$

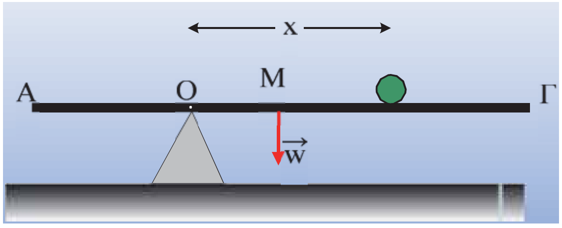
έτσι η απόσταση x=L/8

Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το ανέβασμα της σφαίρας και μέχρι τη στιγμή που θα διανύσει διάστημα L/4–L/8=L/8 θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}'^2+\frac{1}{2}I\omega'^2+mg\frac{L}{16}$$

και μετά από πράξεις θα βρούμε $\upsilon'_{cm}=2\sqrt{2}m/s$.

Β. Η επαφή των δύο σωμάτων θα χαθεί όταν η επιτάχυνση της σανίδας στο σημείο επαφής με σφαίρα γίνει μεγαλύτερο ή οριακά ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας g.



Για την σανίδα θα ισχύει $\Sigma\tau(o)=I_o\alpha_{\gamma\omega\nu}$ άρα

$$Mg\frac{L}{4}=\left(\frac{1}{12}ML^2+M\frac{L^2}{16}\right)a_{\gamma\omega\nu}\,(1)$$

Για το σημείο επαφής της σφαίρας με τη σανίδα θα ισχύει όμως

$$a=\alpha_{\gamma\omega\nu}.x \text{ ή } g=a_{\gamma\omega\nu}.x\ (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα βρούμε

$$x=\frac{7}{12}L=\frac{1{,}96}{3}m$$

Ετσι το συνολικό μήκος που προχώρησε η σφαίρα κυλιόμενη θα είναι

$$S_{o\lambda}=\frac{L}{4}+\frac{7L}{12}=\frac{2{,}83}{3}m$$

έτσι θα κάνει

$$N=\frac{S_{o\lambda}}{2\pi R}=\frac{5}{3\pi}$$

περιστροφές.

Γ. Με τη βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική μέχρι και τη στιγμή που τα

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2+Mg\frac{L}{8}=K_{o\lambda}+mg\frac{L}{8}$$

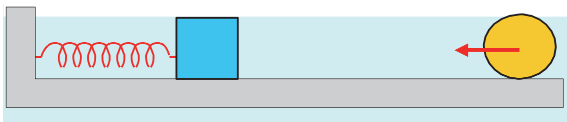
δύο σώματα χάνουν την επαφή τους θα έχουμε

Και μετά τις πράξεις $K_{o\lambda}$=9,8J

Μια σφαίρα που πήρε ανάποδες στροφές.

Η σφαίρα του παρακάτω σχήματος έχει ακτίνα R=0,2m και μάζα m=1kg. Η σφαίρα την χρονική στιγμή t=0 βάλλεται με αρχική ταχύτητα $υ_{cm}$=10m/sec και ταυτόχρονα με την βοήθεια στιγμιαίας εξωτερικής ροπής δίνεται στη σφαίρα κατάλληλη γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε το ανώτερο σημείο της σφαίρας να έχει μηδενική ταχύτητα. Η σφαίρα κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να συγκρουστεί μετωπικά ακαριαία κεντρικά και ελαστικά με κύβο ακμής α=0,4m και μάζας m=1Kg που είναι ακίνητος και δεμένος με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K=\pi^2$N/m. Αν η αρχική απόσταση των κέντρων μάζας των δύο σωμάτων ήταν x=10,4m

να βρεθούν:



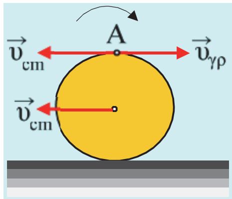
Α. Ο αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει η σφαίρα μέχρι να επιστέψει στην αρχική της θέση.

Β. Αν η σφαίρα τελικά κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ή όχι

Γ. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας τη σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο καθώς η γραφική παράσταση της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας σαν συνάρτηση του χρόνου αν θετική φορά θεωρηθεί η αρχική φορά της ταχύτητας του κέντρου μάζας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το ανώτερο σημείο της σφαίρας δεν έχει συνολικά ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι τέτοια ώστε η γραμμική ταχύτητα περιστροφής και η ταχύτητα λόγω της μεταφορικής κίνησης της σφαίρας έχουν στο ανώτερό της σημείο συνισταμένη 0. Έτσι η σφαίρα ενώ εκτελεί μεταφορική κίνηση προς τα αριστερά θα εκτελεί και δεξιόστροφη περιστροφική κίνηση. Η κίνηση εκτελείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με αποτέλεσμα και η μεταφορική αλλά και η στροφική κίνηση της σφαίρας να μην μπορούν να αλλάξουν. Ετσι η σφαίρα θα εκτελεί ομαλή μεταφορική κίνηση προς τα αριστερά και ταυτόχρονα να εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση δεξιόστροφη με



$$\omega=\frac{\upsilon_{cm}}{R}=50\text{r/s}.$$

Η σφαίρα θα συγκρουστεί κεντρικά και ελαστικά με τον κύβο, μετά από χρόνο:

$$t_1=\frac{x-R-\frac{a}{2}}{\upsilon_{cm}}=1s$$

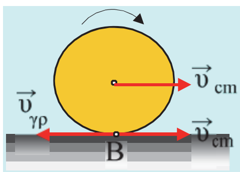
Επειδή οι δυνάμεις την στιγμή της κρούσης είναι κεντρικές δεν θα επηρεάσουν και πάλι την στροφική κατάσταση της σφαίρας μιας και δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή. Η κρούση όμως των δύο σωμάτων είναι ελαστική και τα σώματα έχουν τις ίδιες μάζες. Έτσι τα σώματα θα ανταλλάξουν τις μεταφορικές τους ταχύτητες. Η σφαίρα θα μείνει μεταφορικά ακίνητη και ο κύβος θα πάρει την ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας. Ο κύβος θα εκτελέσει ΓΑΤ και σε χρόνο t_2=T/2=1s θα επιστρέψει στην αρχική του θέση για να ξανασυγκρουστεί με τη σφαίρα που παραμένει υπομονετικά στη θέση της περιστρεφόμενη γύρω από το κέντρο μάζας της δεξιόστροφα. Τότε θα συμβεί και η δεύτερη κρούση μεταξύ του κύβου και της σφαίρας οπότε τα δύο σώματα τα ανταλλάξουν και πάλι ταχύτητες με την σφαίρα όμως αυτή τη φορά να κινείται προς τα δεξιά. Ο χρόνος που θα κάνει για να φτάσει στην αρχική της θέση θα είναι και πάλι

$$t_3 = \frac{x - R - \frac{a}{2}}{\upsilon_{cm}} = 1s$$

Τελικά η συνολική γωνία στροφής της σφαίρας ήταν

$\theta = \omega \cdot t_{ολ} = 50.3 = 150rad$ ή $N = 75/\pi$ περιστροφές.

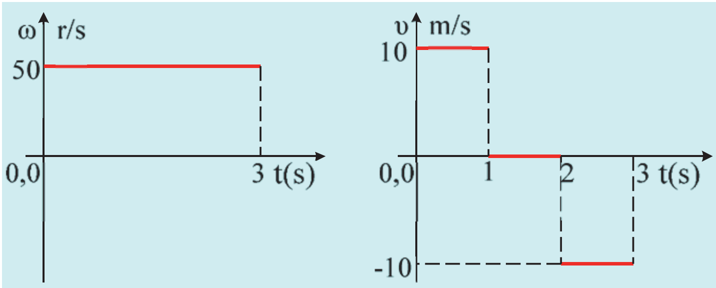
Β. Μετά την κρούση η κατεύθυνση της ταχύτητας του κέντρου μάζας έχει αλλάξει χωρίς όμως να αλλάξει η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Έτσι το κατώτερο σημείο της σφαίρας θα έχει τώρα συνολικά ταχύτητα 0.



Αρα η σφαίρα τώρα θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

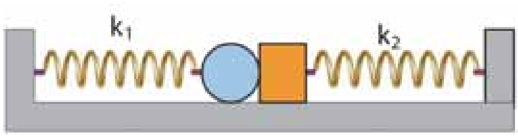
Γ. Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι συνεχώς σταθερή μιας και δεν ασκήθηκε καμία ροπή στην σφαίρα σε όλη την διάρκεια της κίνησής της. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας άλλαξε εξαιτίας των δύο κρούσεων της σφαίρας με τον κύβο.

Έτσι οι γραφικές παραστάσεις θα έχουν την παρακάτω μορφή



Περιοδική κίνηση

Στο παρακάτω σχήμα κύβος ακμής a=0,2m και η σφαίρα έχουν ίσες μάζες $M_1=M_2=1Kg$ βρίσκονται σε επαφή και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο και τα ελατήρια έχουν σταθερές $K_1=K_2=100N/m$. Το ελατήριο K_1 είναι δεμένο στο κέντρο της σφαίρας κατά τέτοιο τρόπο που η σφαίρα να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της.



Συσπειρώνουμε το ελατήριο K_1 κατά $x_1=0{,}1m$ και με τη βοήθεια στιγμιαίας ροπής ζεύγους δίνουμε στη σφαίρα που έχει ακτίνα R=0,1m γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10r/sec$ με φορά όπως και η φορά του ρολογιού. Την στιγμή t=0 η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη. Αν η κρούση των δύο στερεών είναι κεντρική και ελαστική και διαρκεί ελάχιστα να βρεθούν:

Α. Οι γραφικές παραστάσεις των απομακρύνσεων των δύο κέντρων μαζών των στερεών σωμάτων σαν συνάρτηση του χρόνου αν θετική φορά θεωρηθεί η φορά της αρχικής ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας και θέση x=0 για το κάθε σώμα η αρχική θέση ισορροπίας του κέντρου μάζας τους.

Β. Η περίοδος του παραπάνω περιοδικού φαινομένου.

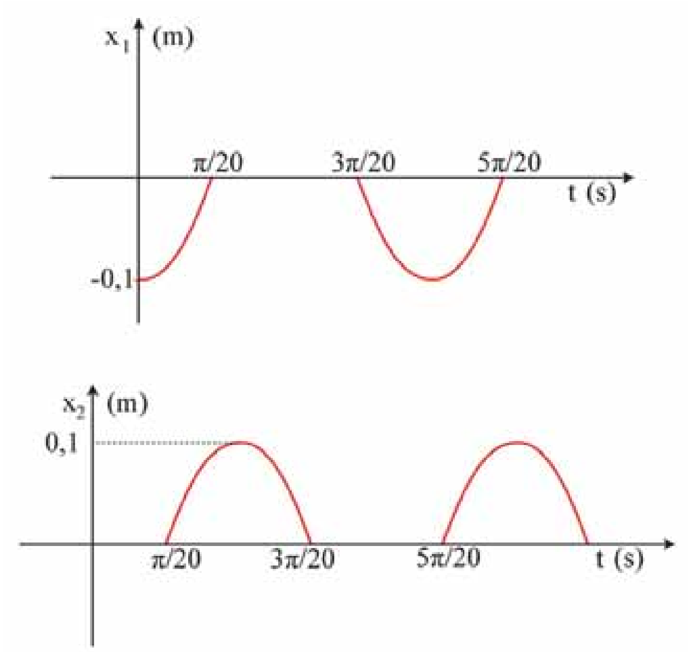
Γ. Η γωνιακή μετατόπιση της σφαίρας μέχρι τη στιγμή που θα αποκτήσει η σφαίρα για δεύτερη φορά τη μέγιστη κινητική της ενέργεια. Πόση είναι αυτή η μέγιστη κινητική ενέργεια της σφαίρας;

Δ. Αν υπάρχουν χρονικές στιγμές που η σφαίρα να φαίνεται ότι κυλάει χωρίς να ολισθαίνει. Πότε συμβαίνει αυτό για πρώτη φορά;

Για τη σφαίρα $I_{cm}=0,4M.R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Επειδή το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο δεν υπάρχει δύναμη που να μπορεί να προκαλέσει ροπή στην σφαίρα. Ετσι η σφαίρα θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ωο και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της θα εκτελεί Γ.Α.Τ. μέχρι να γίνει η πρώτη κρούση. Εκεί η κρούση είναι κεντρική-ελαστική άρα και οι δυνάμεις την στιγμή της κρούσης δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή. Έτσι η στροφική της κατάσταση δεν θα αλλάξει. Τα δύο σώματα επειδή έχουν ίδιες μάζες θα ανταλλάξουν τα κέντρα μάζας τους γραμμικές ταχύτητες. Η κρούση αυτή θα ξανασυμβεί όταν ο κύβος θα επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του και το φαινόμενο θα επαναλαμβάνεται. Η περίοδος ταλάντωσης του κάθε κέντρου μάζας αν ήταν ολοκληρωμένη θα ήταν $T_1=T_2=2\pi\sqrt{M/K}=\pi/5sec$. Το πλάτος ταλάντωσης του κάθε κέντρου μάζας θα είναι $A_1=A_2=x_1=0,1m$ έτσι η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του κέντρου μάζας του κάθε σώματος θα δίνεται από την παρακάτω γραφική παράσταση



Β. Η περίοδος της παραπάνω κίνησης είναι $T=T_1/2+T_2/2=\pi/5$ sec

Γ. Η σφαίρα αποκτά μέγιστη κινητική ενέργεια στην θέση ισορροπίας και ενώ το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα υ_{cm} . Πρώτη φορά αυτό συμβαίνει όταν φτάνει στην ΘΙΤ δηλαδή την στιγμή $t_1=\pi/20$ sec ενώ δεύτερη φορά συμβαίνει αμέσως μετά την δεύτερη κρούση με τον κύβο δηλαδή την χρονική στιγμή $t_2=3\pi/20$ sec.Η σφαίρα σε όλη την παραπάνω χρονική διάρκεια εκτελεί και ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα την ω_o.

$$\text{Αρα } \theta=\omega_o.t_2=3\pi/2 \text{ rad}$$

$$K_{max}=K_{\pi\varepsilon\rho}+K_{\mu\varepsilon\tau}=½.I.\omega_o^{2}+1/2\,.M.U_{cmmax}^{2}=0{,}7J$$

Η σφαίρα για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στιγμιαία θα πρέπει το κατώτερο σημείο της να έχει συνολική ταχύτητα 0. Θα πρέπει να ισχύει $|U_{cm}|=|U_{περ}| =ω_o.R=1m/sec$. Η μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $U_{cmmax}=ω.A=1m/sec$.

Παρατηρώ το σώμα θα φαίνεται ότι κυλάει χωρίς να ολισθαίνει μόνο την στιγμή πριν γίνει η κρούση της σφαίρας με τον κύβο και ενώ η σφαίρα κινείται προς τα δεξιά. Αυτό δεν συμβαίνει και στην δεύτερη κρούση γιατί τότε η συνολική ταχύτητα είναι

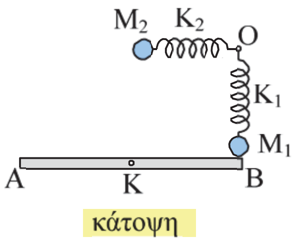
$$U_{κατ}=U_{cmmax}+U_{περ}=2m/sec.$$

Ετσι αυτό θα συμβαίνει τις χρονικές στιγμές

$t=T_1/4 + k.T$ άρα για πρώτη φορά $t_4=π/20$ sec.

Περιοδική κίνηση ράβδου και δύο σωμάτων.

Στο παρακάτω σχήμα τα ελατήρια έχουν σταθερές K_1=100N/m και K_2=25N/m και είναι στερεωμένα σε ένα κοινό σημείο Ο πάνω σε οριζόντιο τραπέζι σχηματίζοντας γωνία 90^o. Τα σημειακά σώματα έχουν ίσες μάζες $M_1=M_2$ και είναι δεμένα στα άκρα των δύο ελατηρίων. Ράβδος μάζας Μ και μήκους $L=2l_o$=1m όπου l_o το φυσικό μήκος των ελατηρίων ισορροπεί πάνω στα τραπέζι και μπορεί να περιστρέφεται οριζόντια γύρω από κατακόρυφο καρφί που βρίσκεται στο κέντρο της ράβδου. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί ενώ είναι παράλληλη με τον άξονα του ελατηρίου με σταθερά K_2 βρισκόμενη σε επαφή με το σώμα μάζας M_1. Συσπειρώνουμε το ελατήριο σταθεράς K_1 κατά Α=0,1m και τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε το σώμα μάζας M_1 ελεύθερο. Αν η κάθε κρούση μεταξύ των σφαιρών και της ράβδου είναι ελαστική και αμέσως μετά την κρούση κινείται ένα μόνο σώμα (είτε η ράβδος είτε οι μάζες M_1 , M_2).



Να βρεθούν:

Α. Η σχέση ανάμεσα στις μάζες των σωμάτων και στη μάζα της ράβδου.

Β. Η περίοδος της κίνησης που θα εκτελέσει το σύστημα αν η μάζα της ράβδου είναι Μ=3Kg.

Γ. Οι γραφικές παραστάσεις των ταχυτήτων των σωμάτων M_1 & M_2 και της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου σαν συνάρτηση με το χρόνο και για χρόνο 0,8πsec.

$I_{cm}=1/12\cdot M\cdot L^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Με την βοήθεια της ΑΔΣ και της ΑΔΕ για κάθε κρούση θα έχουμε

$$M_1.U.L/2=1/12.M.L^2.\omega \quad (1)$$

$$½.M_1.U^2=1/2.1/12.M.L^2.\omega^2 \ (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει εύκολα $M=3M_1$

Β. Η ταχύτητα του σώματος M_1 θα είναι η μέγιστη ταχύτητα και θα βρεθεί από την σχέση $U=\sqrt{K/M_1}.A=1m/sec$.

Από την σχέση (1) μετά από πράξεις το ω=2r/sec. Η ράβδος κινείται χωρίς τριβές πάνω στο τραπέζι άρα θα εκτελέσει περιστροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω=2r/sec μέχρι να καλύψει γωνία $\varphi=90^o$ και να συγκρουστεί και πάλι ελαστικά με τη δεύτερη μάζα M_2. Στην συνέχεια η μάζα M_2 θα εκτελέσει γ.α.τ. και σε χρόνο $t=T_2/2$ θα επιστρέψει στο ίδιο σημείο και θα ξαναγίνει πάλι η ελαστική κρούση. Η ράβδος θα αποκτήσει και πάλι την ίδια κατά μέτρο γωνιακή ταχύτητα ω και θα συγκρουστεί και πάλι με την μάζα M_1. Ετσι συνολικά η περίοδος της περιοδική κίνησης θα είναι

$$T=T_1/2 +T_2/2 +2\theta/\omega= \pi/10 +\pi/2 +\pi/5=0{,}8\pi \text{ sec}$$

Γ. Η εξίσωση της ταχύτητας για το σώμα M_1 θα δίνεται από την σχέση

$$\upsilon_1=\begin{cases} 1.\sigma\upsilon\nu(10t+\pi/2) & 0\leq t<\pi/20 \\ 0 & 0<t<3\pi/4 \\ 1.\sigma\upsilon\nu(10t-15\pi/2) & 3\pi/4<t<0,8\pi \end{cases}$$

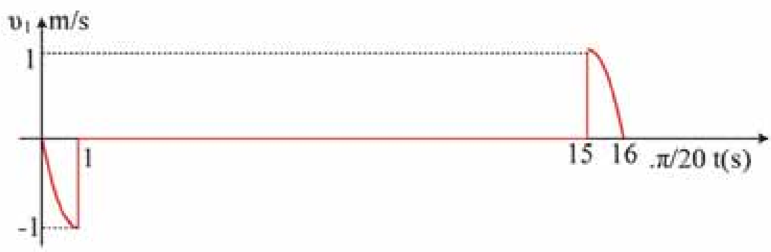
Η εξίσωση της γωνιακής ταχύτητα για τη ράβδο

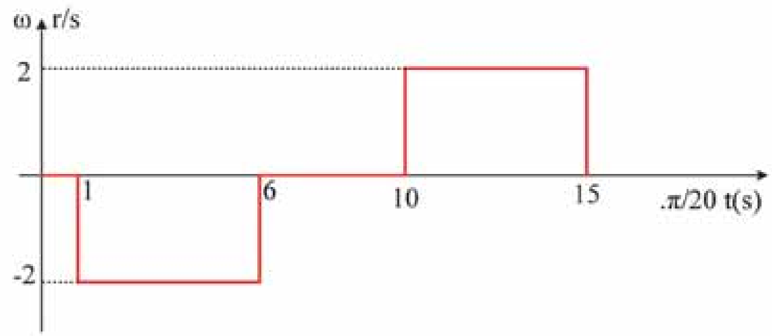
$$\omega=\begin{cases} 0 & 0\leq t<\pi/20 \\ -2 & \pi/20<t<3\pi/10 \\ 0 & 3\pi/10<t<\pi/2 \\ 2 & \pi/2<t<3\pi/4 \\ 0 & 3\pi/4<t<0,8\pi \end{cases}$$

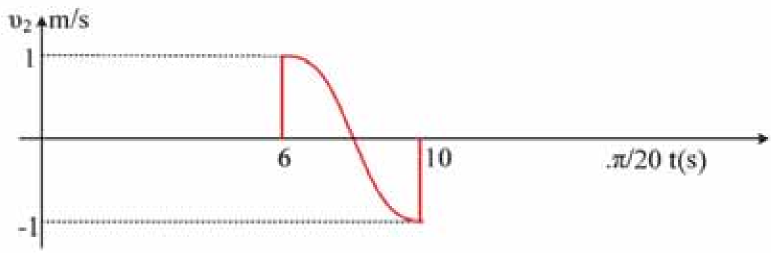
Η εξίσωση της ταχύτητας για το σώμα M_2 θα δίνεται από την σχέση

$$\upsilon_2=\begin{cases} 0 & 0\leq t<3\pi/10 \\ 1.\sigma\upsilon\nu(5t-3\pi/2) & 3\pi/10<t<\pi/2 \\ 0 & \pi/2<t<0,8\pi \end{cases}$$

Αρα οι γραφικές παραστάσεις θα είναι:

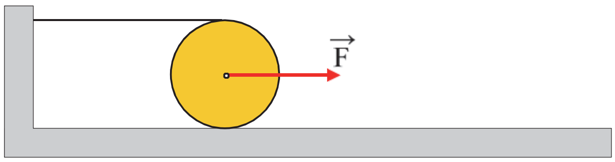






Περιστροφή μέχρι πότε;

Ο κύλινδρος του παρακάτω σχήματος έχει μάζα m=2Kg και ακτίνα R=0,1m. Το νήμα μπορεί να ξετυλίγεται από τον κύλινδρο και να είναι συνεχώς παράλληλο και τεντωμένο με το οριζόντιο επίπεδο που παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής μ=0,1. Την στιγμή t=0 ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=10N με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να αρχίσει να κινείτε περιστρεφόμενος αριστερόστροφα, ενώ η ταχύτητα (ως προς ακίνητο παρατηρητή) του σημείου επαφής με το νήμα είναι συνεχώς μηδενική.



Την χρονική στιγμή t_1=5sec το νήμα κόβεται ενώ τη χρονική στιγμή t_2=10sec ο κύλινδρος μπαίνει σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Να βρεθούν:

Α. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου σαν συνάρτηση του χρόνου και με την βοήθεια αυτής να βρεθεί η συνολική γωνιακή μετατόπιση του κυλίνδρου.

Β. Η γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου σαν συνάρτηση του χρόνου. Τι εκφράζει το περικλειόμενο εμβαδό ανάμεσα στην καμπύλη και τον άξονα των χρόνων;

Γ. Το ποσοστό της ενέργειας που μεταφέρεται στον κύλινδρο μέσω του έργου της δύναμης F, το οποίο μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια και ελευθερώθηκε στο περιβάλλον έως τη χρονική στιγμή $t_2=10s$

Για τον κύλινδρο $I_{cm}=0,5 \cdot M \cdot R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Η ταχύτητα επαφής του κυλίνδρου με το νήμα είναι συνεχώς 0 ενώ η ταχύτητα επαφής του κυλίνδρου με το οριζόντιο επίπεδο θα είναι $2U_{cm}$. Ετσι θα αναπτυχθεί δύναμη τριβής ολίσθησης με φορά προς τα πίσω. Από τους νόμους της κίνησης για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε

$$F\text{-}T\text{-}\mu.m.g=m.a_1 \quad (1)$$

$$T.R\text{-}\mu.m.g.R=0,5.m.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu 1} \quad (2)$$

μετά από πράξεις θα βρούμε $a_1=2m/sec^2$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu 1}=20r/sec^2$.

Την στιγμή $t=5sec$ το νήμα κόβεται με αποτέλεσμα η ροπή της τριβής ολίσθησης να επιβραδύνει στροφικά το σώμα. Από τους νέους νόμους για την νέα κίνηση του κυλίνδρου θα έχουμε

$$F\text{-}\mu.m.g=m.a_2 \text{ άρα } a_2=4m/sec^2 \text{ και}$$

$$\mu.m.g.R=0,5.m.R^2.\alpha_{\gamma\omega\nu 2}$$

$$\text{άρα } \alpha_{\gamma\omega\nu 2}=20r/sec^2.$$

Την χρονική στιγμή $t_2=10sec$ που ο κύλινδρος μπαίνει στο λείο επίπεδο παύουν πλέον να υπάρχουν τριβές. Αρα από την νέα εξισώση κίνησης μόνο για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε:

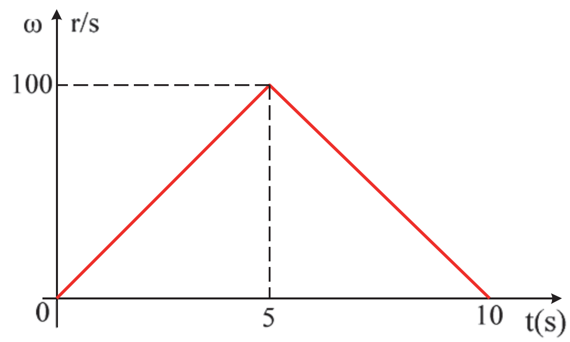
$$F=m.a_3 \text{ άρα } a_3=5m/sec^2.$$

Η γωνιακή ταχύτητα θα δίνεται από την σχέση για την αρχική κίνηση του κυλίνδρου

$$\omega=\alpha\gamma\omega\nu 1.t=20t \qquad \text{για } 0\le t\le 5 \text{ (S.I) και}$$

$$\omega=\omega_o-\alpha_{\gamma\omega\nu 2}.t'=100-20.t' \quad \text{με } t'=t-5 \quad \text{για } 5\le t\le 10 \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση θα είναι



Το περικλειόμενο εμβαδόν εκφράζει την συνολική γωνιακή μετατόπιση του κυλίνδρου μιας και την στιγμή $t_2=10s$ ο κύλινδρος παύει πλέον να εκτελεί στροφική κίνηση.

$$\text{Αρα } \theta=E=100\cdot 10/2=500rad$$

Β. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργεια δίνεται από την σχέση

$$\Delta K/\Delta t=\Sigma F.U+\Sigma\tau.\omega=m.a_1.a_1.t+I.\alpha_{\gamma\omega\nu 1}.\alpha_{\gamma\omega\nu 1}.t=12.t \quad 0\le t\le 5 \text{ (S.I.)}$$

Μόλις όμως κοπεί το νήμα η κίνηση είναι επιταχυνόμενη μεταφορική αλλά επιβραδυνόμενη στροφική έτσι ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας

$\Delta K/\Delta t = \Sigma F.U - \Sigma \tau.\omega = m.a_2.(U_o + a_2.t') - I.\alpha_{\gamma\omega\nu 2}.(\omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu 2}.t') = 60 + 36t'$

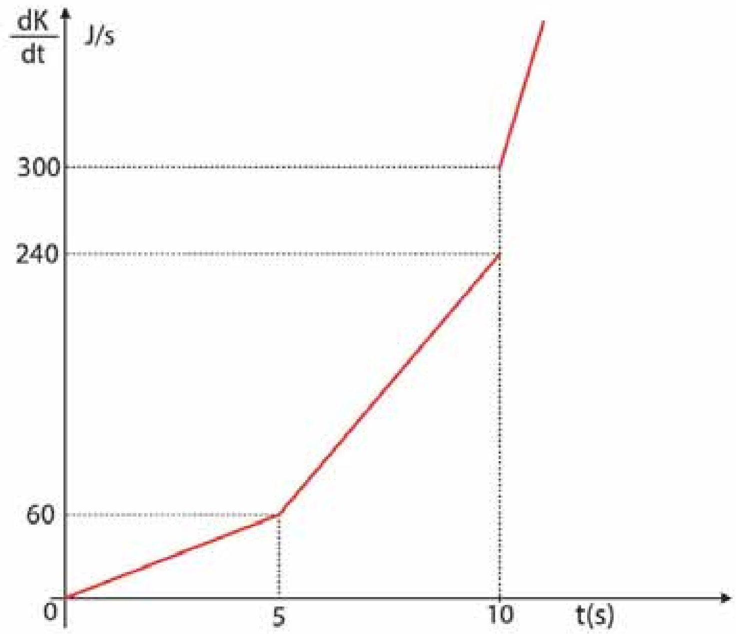
$0 \le t' \le 5$ (S.I.) όπου $t' = t - 5$ και με αντικατάσταση

$$\Delta K/\Delta t = 36t - 120 \quad 5 \le t < 10 \quad (S.I.)$$

Μετά την χρονική στιγμή $t_2 = 10s$ ο κύλινδρο παύει να περιστρέφεται και εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση άρα

$$\Delta K/\Delta t = \Sigma F.U = 10(30 + 5.t'') = 50t - 200 \quad t > 10 \quad (S.I.)$$

Η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή



Το περικλειόμενο εμβαδόν εκφράζει το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και για το πρώτα 10sec είναι:

$$W_{o\lambda} = 60.5/2 + (60 + 240).5/2 = 900j$$

Γ. Με την βοήθεια του νόμου του διαστήματος για την επιταχυνόμενη κίνηση στα πρώτα 5sec

$$x_1=1/2.a_1.t^2=25m$$

ενώ για τα επόμενα 5sec από τον ίδιο νόμο θα έχουμε

$$x_2=Uo.t_2+1/2.a_2.t^2=100m$$

Αρα

$$WF=F.x_{ολ}=10.125=1250J$$

Αρα με βάση το ολικό έργο

$$WF+WT=W_{ολ} \quad \text{άρα } WT=-350J$$

Το ίδιο θα μπορούσε να προκύψει και αν προσθέταμε τα έργα της τριβής για την παραπάνω διαδικασία:

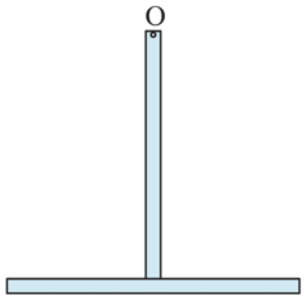
$$WT_1=-T.2x_1=-100J$$
$$WT_2=-T.x_2=-200J$$
$$W_{Tτ}=-T.R.θ=-50J$$

Αρα $W_{Tολ}=-350J$

$$Π=|-350|/1250.100\%=28\%$$

Ροπή αδράνειας και κίνηση ενός στερεού σχήματος Τ.

Δύο ράβδοι ίδιας μάζας M=3kg και ίδιου μήκους L=1m συγκολλούνται σχηματίζοντας ανάποδο Τ όπως στο παρακάτω σχήμα.



Το σύστημα ισορροπεί κατακόρυφα με το κέντρο μάζας της κάθε ράβδου αλλά και το καρφί να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Ασκώντας στο κέντρο μάζας της αρχικά κατακόρυφης ράβδου σταθερή δύναμη F=200/π N η οποία είναι συνεχώς κάθετη στην ράβδο το σύστημα αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από το καρφί.

Α. Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων γύρω από τον άξονα περιστροφής του

Β. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του συστήματος καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση-επιβράδυνση όταν το σύστημα έχει διαγράψει γωνία 90^{o} σε σχέση με την αρχική του θέση.

Γ. Σε κάποια θέση και ενώ το σύστημα ανεβαίνει καταργούμε την δύναμη.

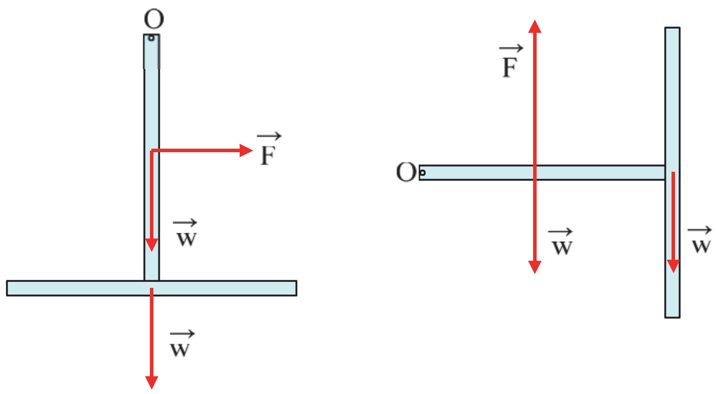
Δ. Αν θέλουμε τελικά το σύστημα να ισορροπήσει σχηματίζοντας ένα κανονικό κατακόρυφο "Τ" μέχρι ποια γωνία σε σχέση με την αρχική κατακόρυφη θέση θα πρέπει να ενεργήσει η δύναμη.

Δίνεται για την κάθε ράβδο το $I_{cm}=1/12M.L^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το σύστημα αποτελείται από δύο ράβδους που περιστρέφονται γύρω από το καρφί που βρίσκεται στο άκρο της μίας και απέχει από το κέντρο μάζας της μίας κατά L/2 και από το κέντρο μάζας της άλλης κατά L. Εφαρμόζοντας λοιπόν κανόνα του Στάινερ για το σύστημα θα έχουμε:

$$I=1/12M\cdot L^2+M(L/2)^2+1/12M\cdot L^2+ML^2=4{,}25kg.m^2$$



Β. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση μέχρι το σύστημα να διαγράψει γωνία 90^o θα έχουμε $W_F=K_{συστ}+U_{W1}+U_{W2}$ άρα

$$200/π.2π.0{,}5/4=K_{συστ}+3.10.0{,}5+3.10.1 \quad \text{άρα} \quad K_{συστ}=5J$$

Με βάση τον νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση και για γωνία διαγραφής 90^o για το σύστημα θα έχουμε:

$$F\cdot L/2-Mg\cdot L/2-M\cdot g\cdot L=I\cdot α_{γων} \quad \text{άρα}$$

$$α_{γων}\approx -3r/sec^2.$$

Δηλαδή το σύστημα εκείνη την στιγμή επιβραδύνει στροφικά ανεβαίνοντας.

Γ. Για να ισορροπήσει το σύστημα σχηματίζοντας κανονικό κατακόρυφο ''Τ'' θα πρέπει στην τελική θέση να μην έχει κινητική ενέργεια και η συνισταμένη των ροπών να είναι ίση με το μηδέν. Με την βοήθεια και πάλι της ΑΔΕ από την αρχική στην τελική θέση θα πρέπει $W_F = +U_{W1'} + U_{W2'}$ άρα

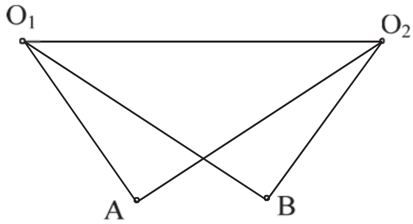
$$F \cdot L\theta/2 = Mg \cdot L + Mg \cdot 2L \quad \text{άρα } \theta = 0{,}9\pi \text{ rad.}$$

Στην ανώτερη θέση τα αποστήματα των βαρών των δύο ράβδων είναι 0 άρα $\Sigma\tau = 0$.

Αρα το σώμα δεν έχει κινητική ενέργεια στο ανώτερο σημείο και σε εκείνο το σημείο ισχύει και $\Sigma\tau(O) = 0$ άρα το σύστημα θα ισορροπεί.

Συμβολή κυμάτων στην επιφάνεια υγρού.

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα u=1m/sec. Την στιγμή t=0 οι πηγές O_1 & O_2 αρχίζουν να ταλαντώνονται κατακόρυφα με εξισώσεις $\psi_1=\psi_2=0,2\eta\mu 2\pi t$ (S.I.). Δύο σημεία Α και Β της επιφάνειας του υγρού βρίσκονται σε τέτοιες θέσεις ώστε να μπορούν να σχηματίζουν ορθογώνια τρίγωνα O_1AO_2 και O_1BO_2. Η απόσταση O_1O_2 είναι 10m και οι αποστάσεις O_1A=6m και O_1B= 8m.



Α. Να βρεθούν πόσες υπερβολές ενίσχυσης και πόσες υπερβολές απόσβεσης βρίσκονται ανάμεσα στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το τέμνουν.

Β. Να παρασταθεί γραφικά η φάση του σημείου Α σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Γ. Να γραφεί η εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Α σε συνάρτηση με τον χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Δ. Να βρεθεί πόσες φορές το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Α είναι υ=0,4πm/sec μέχρι την στιγμή t_4=9sec.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

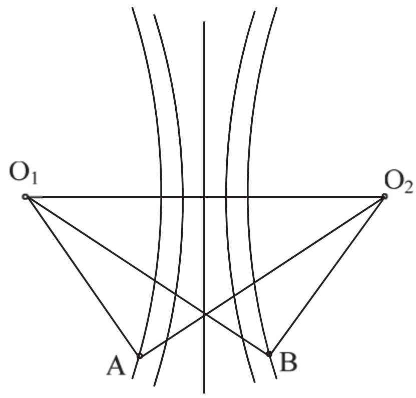
Α. Από τις εξισώσεις των πηγών θα βρεθούν $A=0{,}2m$ και $\omega=2\pi r/s$.

Από τον νόμο της κυματικής $u=\lambda.f$ άρα $\lambda=1m$.

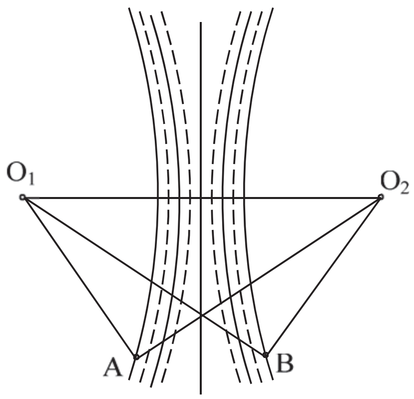
Με την βοήθεια του Π.Θ. για τα ορθογώνια τρίγωνα θα βρούμε $O_2A=8m$ και $O_2B=6m$.

Παρατηρούμε ότι $O_1A-O_2A=\kappa.\lambda$ άρα $6-8=\kappa.1$ άρα $\kappa=-2$ δηλαδή ότι ισχύει η συνθήκη ενίσχυσης για το σημείο Α. Δηλαδή το σημείο Α ανήκει στην υπερβολή (κροσσό) ενίσχυσης με $\kappa=-2$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $O_1B-O_2B=\kappa.\lambda$ άρα $8-6=\kappa.1$ άρα $\kappa=2$ δηλαδή ότι ισχύει η συνθήκη ενίσχυσης και για το σημείο Β. Δηλαδή το σημείο Β ανήκει στην υπερβολή (κροσσό) ενίσχυσης με $\kappa=2$. Από το παρακάτω σχήμα μπορούμε να συμπεράνουμε



ότι ανάμεσα στο Α και το Β υπάρχουν τρεις κροσσοί ενισχυτικής συμβολής αλλά μόνο δύο είναι υπερβολές γιατί ο τρίτος κροσσός είναι ευθεία η μεσοκάθετος στο O_1O_2. Ανάμεσα σε δύο κροσσούς ενίσχυσης υπάρχει πάντα και ένας κροσσός αποσβεστικής συμβολής άρα από το Α έως το Β υπάρχουν 4 υπερβολές απόσβεσης.

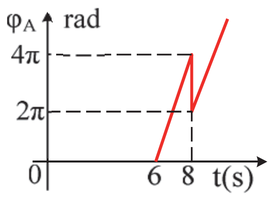


B. Για να φτάσουν τα κύματα στο σημείο Α και να αρχίσει η συμβολή θα χρειασθεί αντίστοιχα χρόνος $t_1=R_1/\upsilon=6sec$ για το κύμα από την πηγή O_1 και $t_2=R_2/\upsilon=8sec$ για το κύμα από την πηγή O_2.

Η εξίσωση της φάσης του σημείου Α θα είναι

$$\Phi_A=\begin{cases} 0 & t\leq 6s \\ 2\pi(t-6) & 6s\leq t<8s \\ 2\pi(t-7) & t>8s \end{cases}$$

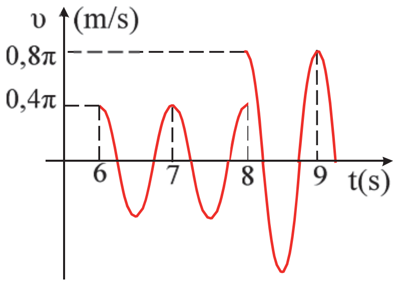
Η γραφική παράσταση θα έχει την μορφή



Γ. Η εξίσωση της ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Α θα είναι

$$U=\begin{cases} 0 & t\leq 6s \\ 0{,}4\pi\sigma\upsilon\nu\ 2\pi(t-6) & 6s\leq t<8s \\ 0{,}8\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(t-7) & t>8s \end{cases}$$

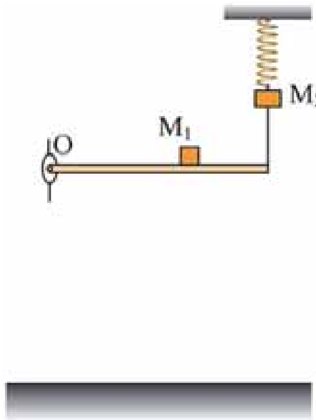
Η γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης θα είναι



Δ. Από το παραπάνω σχήμα παρατηρώ ότι ταχύτητα του σημείου Α είναι μέτρου 0,4πm/sec μέχρι την στιγμή t_4=9sec 9 φορές.

Το σώμα θα χάσει την επαφή;

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος έχει μάζα M=3Kg και μήκος L=1,2m και ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια κατακόρυφου νήματος .



Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται κατακόρυφα χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που βρίσκεται στο άκρο της Ο. Ο άξονας περιστροφής απέχει από το έδαφος ύψος H=1,2m. Πάνω στην ράβδο και σε απόσταση l=1m από το σημείο Ο χωρίς να είναι κολλημένο ισορροπεί σώμα μάζας M_1 .Το σώμα μάζας M_2 ισορροπεί με τη βοήθεια του νήματος και κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς Κ. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα. Αν οι μέγιστες κινητικές ενέργειες (όποια στιγμή και αν αποκτηθούν αυτές) της ράβδου του σώματος M_1 και του σώματος M_2 είναι μεταξύ τους ίσες να βρεθούν:

Α. Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου
Β. Την τάση του νήματος πριν αυτό κοπεί
Γ. Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος M_2.

Για την ράβδο I_o=1/3.ML^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Πρέπει να βρούμε αν θα χαθεί ή όχι η επαφή του σώματος M_1 με την ράβδο την στιγμή που κόβουμε το νήμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι χάνεται η επαφή του σώματος M_1 με την ράβδο. Τότε για την κίνηση της ράβδου από τον νόμο της κίνησης της θα έχουμε

$$M.g.L/2=1/3\ .M.L^2.\alpha_{γων}\ \text{άρα}\ \alpha_{γων}=12{,}5 r/sec^2.$$

Το σημείο λοιπόν της ράβδου που βρίσκεται σε επαφή με το σώμα M_1 θα έχει γραμμική επιτάχυνση $a_1=\alpha_{γων}.l=12{,}5 m/sec^2$ που είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας. Ετσι το σώμα με μάζα M_1 θα χάσει την επαφή του με την ράβδο την στιγμή που θα κοπεί το νήμα. Η ράβδος θα εκτελέσει επιταχυνόμενη στροφικά κίνηση με την επίδραση μόνο της ροπής του βάρους της ράβδου. Το σώμα M_1 θα εκτελέσει ελεύθερη πτώση μιας και έχασε την επαφή του με την ράβδο.
Την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα η ράβδος θα την έχει την στιγμή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας δηλαδή στην θέση που θα έχει γίνει κατακόρυφη. Με την βοήθεια της ΑΔΕ από την αρχική θέση στην κατακόρυφη θέση θα έχουμε

$$M.g.L/2=1/2.1/3.ML^2.\omega_{max}^2\ \ \text{άρα}\ \omega_{max}=5 r/s$$

Β. Η $K_{max}=1/2.1/3.ML^2.\omega_{max}^2$ =18 J για την ράβδο η οποία είναι όμως ίση με την K_{max} του σώματος μάζας M_1. Αυτό θα αποκτήσει μέγιστη ενέργεια όταν φτάσει στο έδαφος. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για το σώμα μάζας M_1

$$M_1.g.L=K_{max} \quad άρα\ M_1=1{,}5Kg.$$

Για την ισορροπία του συστήματος ράβδου-M_1 θα έχουμε

$$-M.g.L/2 \ -M1.g.l +T.L=0 \quad άρα\ \ T=27{,}5N$$

Γ. Το σώμα μάζας M_2 θα έχει μέγιστη κινητική ενέργεια στην ΘΙΤ και από την ΑΔΕΤ θα έχουμε $K_{max}=U_{max}$ άρα $18=1/2.K.A^2$ (1)

Για την αρχική ισορροπία του σώματος M_2 θα ισχύει

$$T+M_2.g=K.x_1 \quad (2)$$

Για την τελική ισορροπία του σώματος M_2 θα ισχύει

$$M_2.g=K.x_2 \quad (3)$$

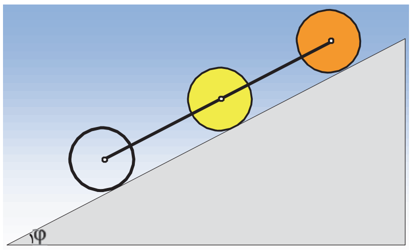
Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα μάζας M_2 δεν έχει ταχύτητα άρα θα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσή του άρα το

x_1-x_2=A (4) με αφαίρεση της (2) και (3)

T/K=A και με την βοήθεια της (1) θα βρούμε A=72/55m

Το τραινάκι…

Ένα λεπτό δαχτυλίδι μάζας Μ και ακτίνας R μία σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R και ένας κύλινδρος μάζας Μ και ακτίνας R συνδέονται μέσω αβαρών ράβδων μεταξύ τους σχηματίζοντας «τραινάκι» με το δαχτυλίδι να παίζει το ρόλο του «μηχανοδηγού» και την σφαίρα με τον κύλινδρο να ακολουθούν διαδοχικά το δαχτυλίδι. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο από κάποιο ύψος ενός αρκετά μεγάλου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ και το σύστημα αρχίζει να κυλίεται χωρίς να



ολισθαίνει .

Να βρεθεί η επιτάχυνση του συστήματος.

Δίνονται οι ροπές αδράνειας του κάθε στερεού $I=\lambda MR^2$ με $\lambda=1$ για το δαχτυλίδι $\lambda=0,4$ για την σφαίρα και $\lambda=0,5$ για τον κύλινδρο ενώ για το κεκλιμένο επίπεδο ημφ=0,49.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

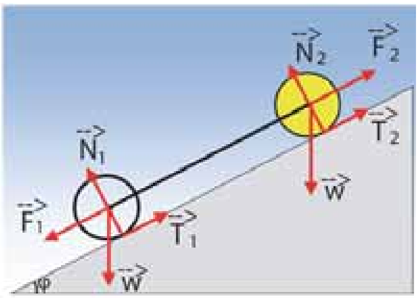
Αν το κάθε στερεό κυλιόταν χωρίς να ολισθαίνει από μόνο του θα μπορούσαμε να βρούμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας τους κάθε στερεού με βάσει τους νόμους του Νεύτωνα για την μεταφορική και στροφική κίνηση

$$Mg\eta\mu\varphi - T = M\alpha \ (1) \qquad TR = \lambda MR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \ (2)$$

και από τις σχέσεις αυτές θα βρούμε $a = g\eta\mu\varphi/(\lambda+1)$ οπότε με βάση την τιμή του λ του κάθε στερεού

$$a_{\sigma\varphi} > a_{\kappa\upsilon\lambda} > a_{\delta\alpha\chi}.$$

Όταν θα συνδεθούν το δαχτυλίδι με την σφαίρα για να αποκτήσουν κοινή επιτάχυνση θα πρέπει η δύναμη της πρώτης ράβδου να αυξήσει την επιτάχυνση του δαχτυλιδιού και να μειώσει την επιτάχυνση της σφαίρας έτσι ώστε να αποκτήσουν την ίδια κατά μέτρο επιτάχυνση οπότε και πάλι με την βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα για την στροφική και την μεταφορική κίνηση του πρώτου συστήματος θα έχουμε



$$Mg\eta\mu\varphi - T_1 + F_1 = Ma \ (3) \quad T_1R = 0{,}5MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \ (4)$$

$$Mg\eta\mu\varphi - T_2 - F_2 = Ma \ (5) \ T_2R = 0{,}4MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} (6)$$

Η αβαρής ράβδος εκτελεί μεταφορική κίνηση με κοινή επιτάχυνση την επιτάχυνση του συστήματος των δύο στερεών σωμάτων. ΄Αρα με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στα άκρα της ράβδου θα ασκούνται αντίθετες δυνάμεις άρα δυνάμεις ίσου μέτρου άρα $F_1 = F_2$

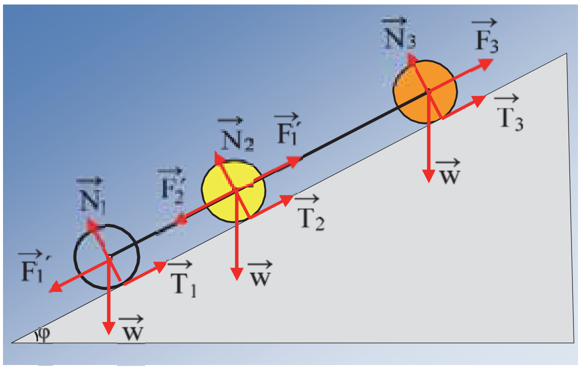
Με αντικατάσταση της σχέσης (4) στην (3) και της σχέσης (6) στη σχέση (5) και πρόσθεση των σχέσεων που θα προκύψουν θα βρούμε

$$α_{συσ}=gημφ/1,7 \quad (8)$$

Από την σχέση (8) παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση του συστήματος δαχτυλιδιού-σφαίρας είναι μικρότερη από την επιτάχυνση του κυλίνδρου αν κυλιόταν μόνος του. Έτσι όταν και ο κύλινδρος θα συνδεθεί με το σύστημα θα πρέπει η επιτάχυνσή του κυλίνδρου να μειωθεί ενώ η επιτάχυνση του συστήματος δαχτυλιδιού σφαίρας να αυξηθεί για να αποκτηθεί και πάλι κοινή επιτάχυνση. Έτσι η δύναμη της δεύτερης ράβδου θα πρέπει να σπρώχνει το σύστημα προς τα κάτω ενώ τον κύλινδρο προς τα πάνω.

Η κάθε αβαρής ράβδος εκτελεί μεταφορική κίνηση με κοινή επιτάχυνση την επιτάχυνση του συστήματος όλων των στερεών σωμάτων. Άρα με βάση τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στα άκρα της κάθε ράβδου θα ασκούνται αντίθετες δυνάμεις άρα δυνάμεις ίσου μέτρου.

Έτσι με βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα στην μεταφορική και περιστροφική κίνηση όλων των στερεών θα έχουμε



Δαχτυλιδι $\quad Mgημφ - T_1 + F'_1 = Ma \quad (9)$

$T_1R=MR^2 α_{γων}$ (10) και με αντικατάσταση $Mgημφ+F'_1=2Ma$ (11)

Σφαίρα $Mgημφ+F'_2-F'_1-T_2=Ma$ (12)

$T_2R=0{,}4MR^2 α_{γων}$ (13) και με αντικατάσταση $Mgημφ+F'_2-F'_1=1{,}4Ma$ (14)

Κύλινδρος $Mgημφ–T_3-F'_2=Ma$ (15)

$T_3R=0{,}5MR^2 α_{γων}$ (16) και με αντικατάσταση $Mgημφ–F'_2=1{,}5Ma$ (17)

Αν προσθέσουμε κατά μέλη την (11) (14) και (17) θα έχουμε

$$3Mgημφ=4{,}9Ma \text{ άρα } a=3gημφ/4{,}9=3m/s^2.$$

Ποδηλατικός γύρος

Ο Κωνσταντίνος εκτός από καλός στη Φυσική είναι και καλός στο ποδήλατο. Σχεδιάζει να τρέξει στο γύρο της Λίμνης Πολυφύτου την Κυριακή 16 Ιουνίου και θέλει να έχει τα καλύτερα δυνατόν αποτελέσματα. Ρωτάει το δάσκαλό του τι πρέπει να κάνει και εκείνος τον παραπέμπει στον ειδικό του ylikonet.gr στα ποδήλατα Διονύση Μητρόπουλο.

Ο Διονύσης σαν καλός δάσκαλος που είναι αρχίζει τις αδιάκριτες ερωτήσεις στον Κωνσταντίνο:

Διονύσης: Πόσα κιλά είσαι Κωνσταντίνε;

Κωσταντίνος: 68kg κύριε Διονύση.

Διονύσης: Κεριά και λιβάνια Διονύση με λένε.

Πόσα κιλά είναι το ποδήλατό σου και ποια η μάζα της κάθε ρόδας του;

Κωνσταντίνος: 12kg ζυγίζει όλο το ποδήλατο και από 1kg ζυγίζει η κάθε ρόδα που είναι πολύ λεπτή και μοιάζει με λεπτό δακτύλιο.

Διονύσης: Ποια η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει το ποδήλατό σου όχι φυσικά αν το αφήσεις από τον Όλυμπο αλλά πάνω στο δρόμο.

Κωνσταντίνος: Ο κατασκευαστής δίνει ασφαλή μέγιστη ταχύτητα u_{max}=125/9 m/s.

Διονύσης: Πόσο είναι το μήκος της διαδρομής που θα ακολουθήσεις και ποιο είναι το ψηλότερο και ποιο τα χαμηλότερο σημείο της διαδρομής;

Κωνσταντίνος: Το μήκος της διαδρομής είναι 50km το υψηλότερο σημείο είναι η πλατεία των Σερβίων σε υψόμετρο 435m και το χαμηλότερο σημείο της διαδρομής είναι το φράγμα Πολυφύτου στα 320m.

Κάπου εδώ τελείωσαν οι ερωτήσεις του Διονύση και άρχισαν οι συμβουλές τακτικής.

Να ακολουθείς πάντα έναν αθλητή έτσι ώστε να μηδενίσεις τις τριβές με τον αέρα. Να αποφεύγεις τις αυξομειώσεις της ταχύτητά σου προσπαθώντας πάντα να έχεις την μέγιστη ταχύτητα που σου δίνει ο κατασκευαστής και τότε μπορείς και να τερματίσεις μέχρι και δεύτερος υπό τις προϋποθέσεις που σου έβαλα.

Με βάσει τον παραπάνω διάλογο και τις συμβουλές του Διονύση να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

Α. Ποιος είναι ο ελάχιστος χρόνος που θα μπορούσε να κάνει ο Κωνσταντίνος το γύρο της λίμνης Πολυφύτου.

Β. Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος Κωνσταντίνος-ποδήλατο;

Γ. Θα πατήσει φρένο κάποια στιγμή ο Κωνσταντίνος και αν σε ποιο υψόμετρο θα βρίσκεται;

Δ. Ποια η ελάχιστη χημική ενέργεια που θα μπορούσε να ξοδέψει ο Κωνσταντίνος για να εκτελέσει το γύρο της λίμνης πολυφύτου αν τελικά τερματίσει με την μέγιστη ταχύτητα που του επιτρέπει ο κατασκευαστής.

Να θεωρηθεί ότι η διαδρομή μέχρι το φράγμα είναι κατηφόρα σταθερής κλίσης όπως επίσης και ότι η ανηφόρα από το φράγμα μέχρι την πλατεία των Σερβίων επίσης σταθερής κλίσης και ότι ο Κωνσταντίνος κατά τις συμβουλές του Διονύση ακολουθεί κατά πόδας (με το ποδήλατο) κάποιον ποδηλάτη για να μην δέχεται τριβές από τον αέρα. Την ώρα που πατάει φρένο να θεωρηθεί ότι ο Κωνσταντίνος δεν καταναλώνει χημική ενέργεια. (τι εύκολα που είναι όλα στο χαρτί…)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Ο ελάχιστος χρόνος που θα μπορούσε να επιτύχει ο Κωνσταντίνος θα ήταν αν φυσικά είχε συνεχώς την μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει το ποδήλατό του με βάσει τον κατασκευαστή. Η κίνηση θα ήταν ομαλή άρα από το νόμος της ταχύτητας στην ομαλή κίνηση θα έχουμε $u=s/t$ θα βρούμε: $u=125/9=50.000/t$ άρα $t=3600s$ ή $t=1h$.

Β. Η μέγιστη κινητική ενέργεια του Κωνσταντίνου-ποδηλάτου θα είναι:

$$K_{max}=½\ M_{ολ}\cdot u_{max}^2+ ½\ I\cdot\omega^2+½\ I\cdot\omega^2= 0,5\cdot 80\cdot(125/9)^2+2\cdot 0,5\cdot 1\cdot(125/9))^2=7.908,9J$$

Γ. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την κάθοδο προς το φράγμα θα έχουμε

$$M_{ολ}\cdot g\cdot H=K_{max} \text{ άρα } 80\cdot 10\cdot H=7.908,9 \text{ άρα } H=9,89m$$

Άρα θα βρίσκεται σε υψόμετρο από την θάλασσα

$$H_{ολ}=H_{Σερ}-H=425,11m$$

Δ. Ο Κωνσταντίνος θα αρχίσει να κουράζεται μετά την στιγμή που θα φτάσει στο φράγμα Πολυφύτου και μέχρι να φτάσει στην πλατεία των Σερβίων. Η ενέργεια που δαπανά ο Κωνσταντίνος θα μετατρέπεται σε βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος από το φράγμα και μέχρι την πλατεία των Σερβίων μιας και η κινητική του ενέργεια παραμένει συνεχώς σταθερή..

Με την βοήθεια της ΑΔΕ:

$$E_{min}=M_{ολ}\cdot g\cdot ΔH=80\cdot 10\cdot(435-320)=92.000J$$

Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στο συνάδελφο και ιδρυτή του ylikonet.gr Διονύση Μάργαρη, που χωρίς την βοήθειά του δεν θα υπήρχε αυτό το βιβλίο.

Επίσης, θα ήθελα ιδιαίτερα να ευχαριστήσω του συναδέλφους: Πάνο Μουστάκα, Διονύση Μητρόπουλο, Βαγγέλη Κουντούρη, καθώς και όλους τους φίλους - μέλη του ylikonet.gr για τις χρήσιμες συμβουλές τους κατά τη διάρκεια της συγγραφής του βιβλίου.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους μαθητές μου, που είναι για μένα πηγή έμπνευσης.