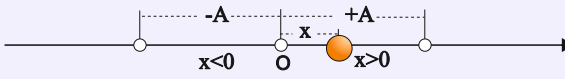


Ταλαντώσεις

Χαρακτηριστικά μεγέθη Α.Α.Τ.

	
Απομάκρυνση: x, y	Πλάτος: A, x_0
Συχνότητα: $f = \frac{N}{t}$	Φάση: $\phi = \omega \cdot t + \phi_0$
Σταθερά επαναφοράς: $D = m \cdot \omega^2$	
Περίοδος: $T = \frac{t}{N}$	Κυκλική συχν.: ω
$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Εξισώσεις της Α.Α.Τ.

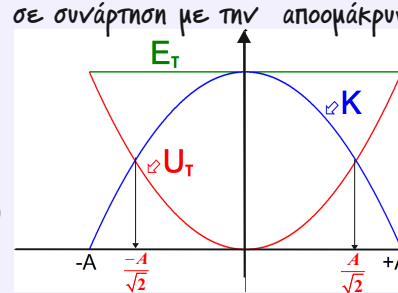
	με αρχική φάση	μέγιστες τιμές
απομάκρυνση	$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0)$	A
ταχύτητα	$v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu(\omega t + \phi_0)$	$v_{\max} = \omega \cdot A$
επιτάχυνση	$a = -\omega^2 \cdot x$ $a = -\alpha_{\max} \eta \mu(\omega t + \phi_0)$	$\alpha_{\max} = \omega^2 \cdot A$
δύναμη $F_{\epsilon \pi}$ επαναφοράς	$\Sigma F = m \cdot a = -m \cdot \omega^2 \cdot x = -D \cdot x$ $F_{\epsilon \pi} = -F_{\max} \eta \mu(\omega t + \phi_0)$	$F_{\max} = D \cdot A$

Τριγωνομετρικές σχέσεις

$\eta \mu \theta = \eta \mu \theta \Rightarrow \begin{cases} \phi = 2\kappa\pi + \theta & (\sigma \upsilon \nu \theta > 0) \\ \phi = 2\kappa\pi + \pi - \theta & (\sigma \upsilon \nu \theta < 0) \end{cases}$	$\sigma \upsilon \nu \theta = \sigma \upsilon \nu \theta \Rightarrow \begin{cases} \phi = 2\kappa\pi + \theta & \eta \mu \theta > 0 \\ \phi = 2\kappa\pi - \theta & \eta \mu \theta < 0 \end{cases}$
$\epsilon \phi \theta = \epsilon \phi \theta \Rightarrow \phi = \kappa\pi + \theta$	$\eta \mu^2 \phi + \sigma \upsilon \nu^2 \phi = 1$
$\eta \mu A + \eta \mu B = 2 \sigma \upsilon \nu \frac{A+B}{2} \eta \mu \frac{A-B}{2}$	$\eta \mu^2 A = \frac{1 - \sigma \upsilon \nu 2A}{2}$

Ενέργεια Ταλάντωσης

σε συνάρτηση με την απομάκρυνση

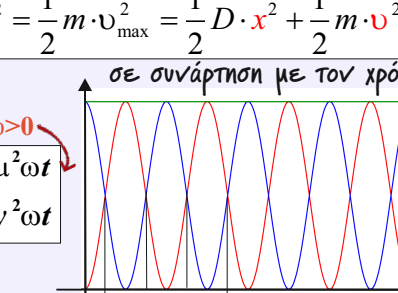


$$E_T = U_T + K$$

$$\frac{dU_T}{dt} + \frac{dK}{dt} = 0$$

$$E_T = \frac{1}{2} D \cdot A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_{\max}^2 = \frac{1}{2} D \cdot x^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

σε συνάρτηση με τον χρόνο



για $t=0, x=0, v>0$

$$U_T = E_T \cdot \eta \mu^2 \omega t$$

$$K = E_T \cdot \sigma \upsilon \nu^2 \omega t$$

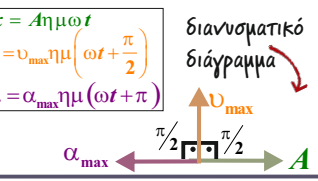
Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης αλλά και η κινητική μεταβάλλονται με συχνότητα $2f$ και περίοδο $T/2$ όπου f και T η συχνότητα και η περίοδος της Α.Α.Τ

Γραφ. παραστ. Χρήσιμες σχέσεις

$x = A \eta \mu \omega t$
 $v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu \omega t$
 $a = -\alpha_{\max} \eta \mu \omega t$

$x = A \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$
 $v = v_{\max} \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$
 $a = -\alpha_{\max} \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$

διανυσματικό διάγραμμα



$\phi = \omega t + \phi_0$
 $\epsilon \phi \theta = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \omega$

Κάθε φορά που το σώμα ολοκληρώνει μία ταλάντωση η φάση αυξάνει κατά 2π

$\alpha = f(x)$
 $\epsilon \phi \theta = \omega^2$
 $F_{\epsilon \pi} = -D \cdot x$
 $\epsilon \phi \theta = D$

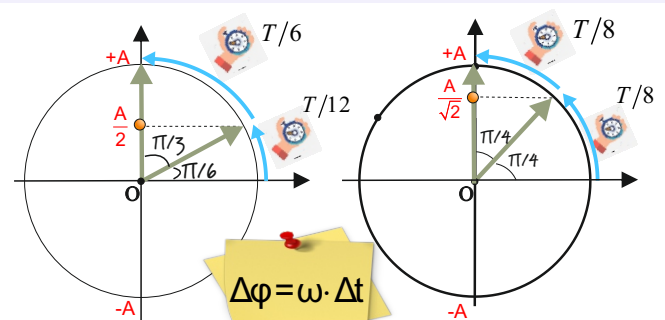
$v = f(x)$
 $v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$
 $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$
 ή με απαλοιφή του χρόνου $\eta \mu(\omega t + \phi_0) = \frac{x}{A}$
 $\sigma \upsilon \nu(\omega t + \phi_0) = \frac{v}{\omega A}$
 $\Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$

$\alpha = f(v)$
 $a = \pm \omega \sqrt{v_{\max}^2 - v^2}$
 $\sigma \upsilon \nu(\omega t + \phi_0) = \frac{v}{v_{\max}}$
 $\eta \mu(\omega t + \phi_0) = -\frac{a}{a_{\max}}$
 $\Rightarrow \frac{v^2}{v_{\max}^2} + \frac{a^2}{a_{\max}^2} = 1$

✓ έργο δύναμης επαναφοράς $W_{F_{\epsilon \pi}} = -\Delta U_T$
 ✓ ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας
 $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\omega}}{dt} = \frac{dW_{F_{\epsilon \pi}}}{dt} = F_{\epsilon \pi} \cdot \frac{dx}{dt} = F_{\epsilon \pi} \cdot v = -D \cdot x \cdot v$

Κύκλος αναφοράς για την Α.Α.Τ.

Η απομάκρυνση ενός σώματος που εκτελεί Α.Α.Τ μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια ενός στρεφόμενου διανύσματος που στρέφεται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα ω και έχει μέτρο όσο και το πλάτος της Α.Α.Τ. Η προβολή του διανύσματος στον κατακόρυφο άξονα δίνει την απομάκρυνση.

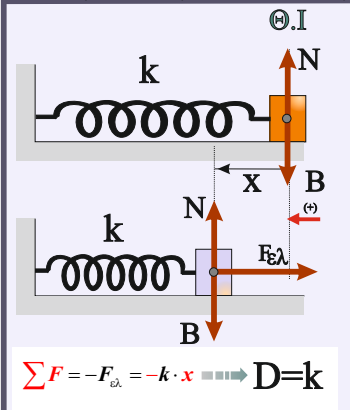


Η γωνία περιστροφής του στρεφόμενου διανύσματος είναι ανάλογη του χρόνου κίνησης

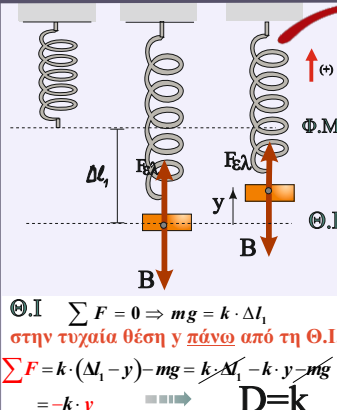
Ταλαντώσεις

Σώματα που εκτελούν Α.Α.Τ

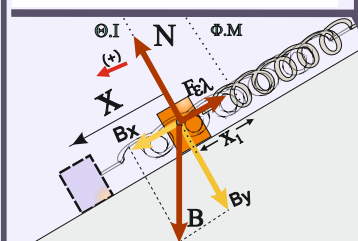
- ✓ προσδιορίζω τη Θ.Ι. όπου $\Sigma F=0$
- ✓ εκτρέπω κατά τυχαία θέση x από τη Θ.Ι. προς τα θετικά και αποδεικνύω ότι $\Sigma F=-D \cdot x$



$$\Sigma F = -F_{ελ} = -k \cdot x \implies D=k$$



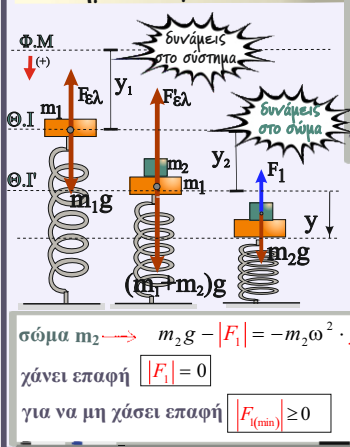
$$\begin{aligned} \Theta.I \quad \Sigma F = 0 &\implies mg = k \cdot \Delta l_1 \\ \text{στην τυχαία θέση } y \text{ πάνω από τη } \Theta.I. \\ \Sigma F &= k \cdot (\Delta l_1 - y) - mg = k \cdot \Delta l_1 - k \cdot y - mg = \\ &= -k \cdot y \implies D=k \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Theta.I \quad \Sigma F = 0 &\implies mg \sin \mu \phi = k \cdot x_1 \\ \text{στην τυχαία θέση } y \text{ κάτω από τη } \Theta.I. \\ \Sigma F &= mg \sin \mu \phi - k \cdot (x_1 + x) = \\ &= mg \sin \mu \phi - k \cdot x_1 - k \cdot x = \\ &= -k \cdot x \implies D=k \end{aligned}$$

- ✓ Δυναμική ενέργεια ελατηρίου $U_{ελ} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l^2$
- ✓ Έργο δύναμης ελατηρίου $W_{F_{ελ}} = -\Delta U_{ελ}$ όπου Δl η συστολή ή η επιμήκυνση (μετρείται από το Φ.Μ.)

Συστήματα σωμάτων



$$\begin{aligned} D_{\text{συστ}} &= k \implies (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 = k \\ \text{σώμα } m_2 &\implies T - m_2 g = -m_2 \omega^2 \cdot y \\ \text{για να μη χαλαρώσει το σχοινί } T_{(\min)} &\geq 0 \\ \text{για να μη κοπεί το σχοινί } T_{(\max)} &\leq T_{\text{θραύσης}} \\ \text{σώμα } m_2 &\implies T_{\sigma} = -m_2 \omega^2 \cdot x \\ \text{για να μην ολισθήσει } T_{\sigma(\max)} &\leq \mu \cdot N \\ \text{κάθε σώμα εκτελεί ΑΑΤ με ίδιο } \omega \end{aligned}$$

Κρούση και Α.Α.Τ

Ελαστική κρούση

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Κεντρική Ελαστική κρούση

$$v_1 + V_1 = v_2 + V_2$$

Κεντρική Ελαστική κρούση με ακίνητο σώμα m_2

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

Μετά την κρούση

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2$$

όπου x η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{D}}$$

Πλαστική κρούση

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}$$

Μετά την κρούση

Θ.Ι' η θέση ισορροπίας γύρω από την οποία θα εξελιχθεί η ταλάντωση του συστήματος.

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} D x_2^2 = \frac{1}{2} D A'^2$$

όπου x_2 η απόσταση του συστήματος από τη Θ.Ι'

η πλαστική κρούση αλλάζει τη Θ.Ι. του συστήματος όταν το σώμα m_1 είναι συνδεδεμένο σε κατακόρυφο ή πλάγιο ελατήριο

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}}$$

Ελεύθερη ταλάντωση

Αμείωτη ταλάντωση $\Sigma F = m \cdot a = -D \cdot x$

Η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται είναι η ιδιοσυχνότητα f_0

Φθίνουσα ταλάντωση $\Sigma F = m \cdot a = -D \cdot x + (-b \cdot v)$

όπου b σταθερά απόσβεσης

- ✓ για ορισμένη τιμή του b T -σταθ.
- ✓ αύξηση του b οδηγεί σε μικρή αύξηση της T
- ✓ στη διάρκεια μιας περιόδου το πλάτος μειώνεται κατά το ίδιο ποσοστό.
- ✓ $W_{\text{αν}} = \Delta E$

Εξαναγκασμένη ταλάντωση

$\Sigma F = m \cdot a = -m \omega_{εξ}^2 \cdot x = -m \omega_0^2 \cdot x + (-b \cdot v) + F_{εξ}$

$F_{εξ} = F_0 \eta \mu \omega_{εξ} t$

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

$$f_{εξ} = f_0$$

όπου f_0 ιδιοσυχνότητα

$$F_{εξ} = b \cdot v$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Σύνθεση 2 Α.Α.Τ ίδιας διεύθυνσης & συχν.

$y_1 = A_1 \eta \mu(\omega t + \theta_1)$ $\Delta \phi = \theta_2 - \theta_1 = \text{σταθ.}$

$y_2 = A_2 \eta \mu(\omega t + \theta_2)$

$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta \phi}$

$\epsilon \phi \theta = \frac{A_2 \eta \mu \Delta \phi}{A_1 + A_2 \cos \Delta \phi}$

Αν $A_1 = A_2$ τότε $\theta = \Delta \phi / 2$

! $E'_r = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos \Delta \phi$

$y = A' \eta \mu(\omega t + \theta_1 + \theta)$

Διακροτήματα

$y_1 = A \eta \mu \omega_1 t$ $y_2 = A \eta \mu \omega_2 t$ $\Delta \phi \neq \text{σταθ.}$

$y = y_1 + y_2 = A(\eta \mu \omega_1 t + \eta \mu \omega_2 t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \eta \mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$

δεν είναι Α.Α.Τ

$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$

συχνότητα συνισταμένης $\frac{f_1 + f_2}{2}$

συχνότητα διακροτήματος (μεγιστοποίησης πλάτους) $f_\delta = |f_1 - f_2|$

όπου f_1 και f_2 ελάχιστα διαφέρουν μεταξύ τους